

§ 4-3 2次関数の最大・最小

1. x が $0 \leq x \leq 3$ という範囲を動くときの、関数 $f(x) = 2x^2 - 4ax + a + a^2$ の最小値 m が 0 となるような a の値をすべて求めよ。

(1986 東京大)

2. 関数 $y = (x^2 + 2x)^2 + 4(x^2 + 2x) - 5$ の最小値を求めよ。

(2006 青山学院大)

3. x を実数とする。 $A = x^2 - 2x$ とおくと、 A の最小値は [ア] である。

したがって、 $y = (x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x)$ の最小値は [イ] である。

(2007 北海道工大)

4. 関数 $y = (x^2 - 3x)^2 - 9(x^2 - 3x)$ ($1 \leq x \leq 4$) の最大値・最小値を求めよ。

(2006 慶応大)

5. t を実数とし、 $t - 1 \leq x \leq t$ における関数 $y = x^2 - 1$ の最大値を $p(t)$ 、最小値を $q(t)$ とする。

(1) t の関数 $s = p(t)$ と $s = q(t)$ のグラフを書け。

(2) $p(t) - q(t)$ の最小値を求めよ。

(2003 法政大)

6. m を実数とする。 x の関数 $f(x) = x^2 + 3x + m$ の $m \leq x \leq m + 2$ における最小値を g とおく。

(1) $m > -\frac{3}{2}$ のとき、 g を m を用いて表せ。

(2) $m \leq -\frac{3}{2}$ のとき、 g を m を用いて表せ。

(3) m の値がすべての実数において変化するとき、 g の最小値を求めよ。

(2008 岐阜大)

7. a を実数とする。 x の 2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ の区間 $a - 1 \leq x \leq a + 1$ における最小値を $m(a)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $m\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ。

(2) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ。

(3) a が実数全体を動くとき、 $m(a)$ の最小値を求めよ。

(2017 岡山大)

$$1. \quad -1, 0, 1, 9$$

$$2. \quad -8$$

$$3. \quad [\mathcal{A}] = -1, [\mathcal{I}] = -3$$

$$4. \quad \text{最大値} \frac{405}{16} \left(x = \frac{3}{2} \right)$$

$$\text{最小値} = -20 \quad (x = 4)$$

$$5. \quad (1) \text{ 略 } (2) \frac{1}{4} \left(t = \frac{1}{2} \right)$$

$$6. \quad (1) g = m^2 + 4m$$

$$(2) \quad m < -\frac{7}{2} \rightarrow g = m^2 + 8m + 10$$

$$-\frac{7}{2} \leq m \leq \frac{2}{3} \rightarrow g = m - \frac{9}{4}$$

$$(3) \quad -6 \quad (m = -4)$$

$$7. \quad (1) \quad m\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{16}$$

$$(2) \quad m(a) = \begin{cases} 2a^2 + 3a + 2 & \left(a < -\frac{2}{3}\right) \\ 1 - \frac{a^2}{4} & \left(-\frac{2}{3} \leq a \leq \frac{2}{3}\right) \\ 2a^2 - 3a + 2 & \left(a > \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

$$(3) \quad \frac{7}{8}$$