

§ 4-4 多変数関数の最大・最小

1. 実数 x, y が $x^2 + y^2 = 1$ であるとき、 $\sqrt{3}x^2 + 2xy - \sqrt{3}y^2$ の最大値とそのときの x, y の値を求めよ。
(1968 北海道大)
2. 実数 x, y は $x \geq 0, y \geq 0$ であり、 $x + 2y = 6$ をみたす。このとき、 y の値のとり得る範囲は
[ア] $\leq y \leq$ [イ] であり、 $x^2 + 2y^2$ の最大値は [ウエ] である。
(2020 東海大)
3. 実数 x と y が $x^2 + xy + y^2 = 3$ を満たしながら動くとき、以下の問に答えよ。
(1) $t = x + y, s = xy$ とおくとき、 t がとりうる値の範囲を求めよ。
(2) $z = x^2 + y^2 + 2x + 2y$ とするとき、 z がとりうる値の範囲を求めよ。また、 z の最大値と最小値を与える x, y の値をそれぞれ求めよ。
(2019 西南学院大)
4. x, y が実数で、 $x^2 + y^2 = 1$ のとき、 $3x + 2y^2$ の最大値 M の値と最小値 m の値を求めよ。
(2017 北海道医療大)
5. 実数 x, y が $x^2 - 2xy + y^2 - \sqrt{3}x - \sqrt{3}y + 12 = 0$ を満たすとき、次の最小値を求めよ。
(1) $x + y$ (2) xy (3) $x^3 + y^3$
(1977 北海道大)
6. 実数 x, y が $2x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ を満たすとき、 y のとりうる値の範囲は [ア] であり、 $z = x^2 + y$ のとりうる値の範囲は [イ] である。
(2018 南山大)
7. xy 平面において、連立不等式 $y \leq 3, y + x - 4 \geq 0, y + 2x - 8 \leq 0$ の表す領域を D とする。
(1) D を図示せよ。
(2) 点 (x, y) が D を動くとき、 $k = y + x^2 - 4x$ のとる値の最大値と最小値を求めよ。
(1988 北海道大)
8. 関数 $x + y = 1, 0 \leq x \leq 2$ のとき、 $x - 2y^2$ の最大値と最小値を求めよ。
(2007 関西大)
9. 実数 x, y が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき、 $x + y^2$ の最大値と最小値を求めよ。
(2004 千葉工大)

10. 実数 x, y が $x^2 + y^2 = 4$ を満たしているとき、 $4x + 2y^2$ の最大値と最小値、およびそのときの x, y の値を求めよ。

(2007 神戸学院大)

11. 実数 x, y が $x + 3y = 4$ を満たすとき、 $2x^2 + xy + y^2$ の最小値を求めよ。

(2004 近畿大)

12. 実数 x, y が $x + y = 4$ および $x \geq 0, y \geq 0$ を満たすとき、 $x^2y^2 + x^2 + y^2 + xy$ の最小値は[ア], 最大値は[イ]である。

(2005 東京工科大)

13. x, y は実数とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $x^2 + 2y^2 = 1$ のとき、 $x + 4y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) $x > 0, y > 0, x^2 + y^2 = 1$ とする。 xy の最大値を求めよ。また、そのときの x, y の値も求めよ。

((1) 福島大 (2) 立命館大)

14. 実数 x, y は $8x^2 - 14x + y^2 = 39, y \geq 0$ を満たす。

(1) x のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) y のとり得る値の範囲を求めよ。

(2018 近畿大公募推薦)

15. 実数 x, y, z が $x + y + z = 1, x + 2y + 3z = 5$ を満たすとする。

(1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ の最小値を求めよ。

(2) $z \geq 0$ のとき、 xyz が最大となる z の値を求めよ。

(2017 大阪大)

1. 最大値, 最小値 $=\pm 2$, $x = \pm \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $y = \pm \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2. ア 0 イ 3 ウ 3 エ 6

3. (1) $-2 \leq t \leq 2$ (2) $-2 \leq z \leq 7$ $(x, y) = (-1, 2), (2, -1)$ のとき、最大値
 $(x, y) = (-1, -1)$ のとき、最小値

4. $(x, y) = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ のとき、最大値 $\frac{25}{8}$ $(x, y) = (-1, 0)$ のとき、最小値 -3

5. (1) $4\sqrt{3}$ (2) 12 (3) $48\sqrt{3}$

6. ア $-1 \leq y \leq 3$ イ $-1 \leq z \leq \frac{7}{2}$

7. (1) 略 (2)

8. $(x, y) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ のとき、最大値 $\frac{9}{8}$ $(x, y) = (0, 1)$ のとき、最小値 -2

9. $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ のとき、最大値 $\frac{5}{4}$ $(x, y) = (-1, 0)$ のとき、最小値 -1

10. $(x, y) = (1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3})$ のとき、最大値 10
 $(x, y) = (-2, 0)$ のとき、最小値 -8

11. $(x, y) = \left(-\frac{1}{8}, \frac{11}{8}\right)$ のとき、最小値 $\frac{7}{4}$

12. ア 28 イ $\frac{63}{4}$

13. (1) 最大値 $\frac{17}{8}$ 最小値 -1 (2) $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき、最小値 $\frac{1}{2}$

14. (1) $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{13}{4}$ (2) $0 \leq y \leq \frac{19\sqrt{2}}{4}$

15. (1) $\frac{27}{4}$ (2) $z = \frac{5+\sqrt{7}}{3}$