# §５　２次関数の最大最小

**１**．$a$ を負の定数とする。2 次関数 $f(x)=ax^2-2ax+b$ の $-2 \leqq x \leqq 2$ における最大値が 12、最小値が $-6$ のとき、$a, b$ の値を求めよ。

（2004 同志社女子大）

**２**．2 次関数 $f(x)=ax^2-6ax+b$ は、区間 $1 \leqq x \leqq 4$ において最大値 11，最小値 8 をとる。このとき $a>0$ ならば、$b=$［ ア ］であり、$a<0$ ならば、$b=$［ イ ］である。

（2006 愛知工大）

**３**．$x$ が $0 \leqq x \leqq 3$ という範囲を動くときの、関数 $f(x)=2x^2-4ax+a+a^2$ の最小値 $m$ が 0 となるような $a$ の値をすべて求めよ。

（1986 東京大）

**４**．関数 $y=(x^2+2x)^2+4(x^2+2x)-5$ の最小値を求めよ。

（2006 青山学院大）

**５**．$x$ を実数とする。$\mathrm{A}=x^2-2x$ とおくと、A の最小値は［ ア ］である。したがって、$y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)$の最小値は［ イ ］である。

（2007 北海道工大）

**６**．関数 $y=(x^2-3x)^2-9(x^2-3x)$（ $1 \leqq x \leqq 4$ ）の最大値・最小値を求めよ。

（2006 慶応大）

**７**．関数 $f(x)=3a(x^2+4x+2)^2+b(x^2+4x+2)-a$（ $a, b$ は実数で $ab>0$ ）の $x \geqq 0$ における最小値が 15 で、$f(1)=160$ とすると、$a=$［ ア ］, $b=$［ イ ］である。このとき、$-5 \leqq x \leqq 0$ における $f(x)$の最大値は［ ウ ］、最小値は［ エ ］であり、方程式 $f(x)=0$ の実数解のうち最大のものは［ オ ］である。

（1988 立命館大）

**８**．$x$ の関数 $f(x)=a(x^2+2x+2)^2+2a(x^2+2x+2)+b$ は最小値 6 をもち、$f(0)=11$ である。このとき、$a=$［ ア ］, $b=$［ イ ］， $f$(−［ ウ ］) $=6$ , $f(1)=$［ エ ］である。

（2007 東海学園大）

**９**．関数 $y=(x^2+2x)^2+2a(x^2+2x)+b$ について、最小値は $-4$ であり、$x=1$ のとき $y=0$ である。このとき、定数 $a, b$ の値を求めよ。

（2005 大阪学院大）

**10**．関数 $f(x)=x^2-2k(k+1)x+1$ は $-2 \leqq f(1) \leqq 2$ を満たしているという。ただし、$k$ は実数とする。

(1) $k$ の値の範囲を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の最大値を M とするとき、M を $k$ の式で表せ。
(3) M の最小値を求めよ。

（2006 北海学園大）

11. $a$ を正の実数とし、$f(x) = -a^2x^2 + 4ax$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。
(1) $0 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。
(2) 2 点 A( 2 , 3 ) , B( 3 , 3 )を端点とする線分を $l$ とする。曲線 $y = f(x)$ と線分 $l$（端点を含む）が共有点を持つような $a$ の値の範囲を求め、数直線上に図示せよ。

（2009 神戸大）

12. $p$ を定数として、関数 $y = (x^2 - 2x)^2 + 2p(x^2 - 2x) + p + 1$ の最小値を $m$ とする。
(1) $m$ を $p$ の式で表せ。
(2) $m$ を最大にする $p$ の値を求めよ。

（2004 工学院大）

13. $t$ を実数とし、$t - 1 \leqq x \leqq t$ における関数 $y = x^2 - 1$ の最大値を $p(t)$ , 最小値を $q(t)$ とする。
(1) $t$ の関数 $s = p(t)$ と $s = q(t)$ のグラフを書け。
(2) $p(t) - q(t)$ の最小値を求めよ。

（2003 法政大）

14. $m$ を実数とする。x の関数 $f(x) = x^2 + 3x + m$ の $m \leqq x \leqq m + 2$ における最小値を $g$ とおく。
(1) $m > -\dfrac{3}{2}$ のとき、$g$ を $m$ を用いて表せ。
(2) $m \leqq -\dfrac{3}{2}$ のとき、$g$ を $m$ を用いて表せ。
(3) $m$ の値がすべての実数において変化するとき、$g$ の最小値を求めよ。

（2008 岐阜大）

15. $a$ を実数とする。x の 2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ の区間 $a - 1 \leqq x \leqq a + 1$ における最小値を $m(a)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。
(1) $m\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ。
(2) $m(a)$ を $a$ の値で場合分けして求めよ。
(3) $a$ が実数全体を動くとき、$m(a)$ の最小値を求めよ。

（2017 岡山大）

16. 実数 $a$ , $b$ に対して、$f(x) = a(x - b)^2$ とおく。ただし、$a$ は正とする。放物線 $y = f(x)$ が直線 $y = -4x + 4$ に接している。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $b$ を $a$ で表せ。

(2) $0 \leqq x \leqq 2$ において、$f(x)$の最大値 $M(a)$と、最小値 $m(a)$を求めよ。

(3) $a$ が正の実数を動くとき、$M(a)$の最小値を求めよ。

(2010 神戸大)

**17.** 関数 $x+y=1$ , $0 \leqq x \leqq 2$ のとき、$x-2y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

(2007 関西大)

**18.** 実数 $x$ , $y$ が $x^2+y^2=1$ を満たすとき、$x+y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

(2004 千葉工大)

**19.** 実数 $x$ , $y$ が $x^2+y^2=4$ を満たしているとき、$4x+2y^2$ の最大値と最小値、およびそのときの $x$ , $y$ の値を求めよ。

(2007 神戸学院大)

**20.** 実数 $x$ , $y$ が $x+3y=4$ を満たすとき、$2x^2+xy+y^2$ の最小値を求めよ。

(2004 近畿大)

**21.** 実数 $x$ , $y$ が $x+y=4$ および $x \geqq 0$ , $y \geqq 0$ を満たすとき、$x^2y^2+x^2+y^2+xy$ の最小値は[ ア ]、最大値は[ イ ]である。

(2005 東京工科大)

**22.** 点$(-1, -3)$を頂点とする放物線の方程式を $y=f(x)$ , 2 点$(1, 2)$ , $(-3, 2)$を通る放物線の方程式を $y=g(x)$とする。このとき、$f(x)=x^2+$[ ア ]$x+$[ イ ] , $g(x)=3x^2+$[ ウ ]$x+$[ エ ]となる。また、関数 $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ の $-2 \leqq x \leqq -\dfrac{1}{2}$ における最大値は $x=$[ オ ]のとき[ カ ]、最小値は $x=$[ キ ]のとき[ ク ]である。

(2010 立命館大)

**23.** 長方形の折紙 ABCD がある。$AB=1$ , $AD=\sqrt{3}$ である。対角線 BD と平行な折り目 PQ をつけて ABCD を折る。ここで、P は辺 AB 上の点であり、Q は辺 AD 上の点である。$AP=x$ とおくとき、次の問いに答えよ。

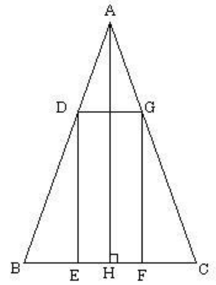
(1) 折り返したとき、頂点 A が長方形の内にとどまるときの $x$ の値の範囲を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ において、重なる部分の面積 $S(x)$を求めよ。

(3) $S(x)$の最大値と、そのときの $x$ の値を求めよ。

(2006 京都女子大)

**24.** 図のように AB と AC が等しい二等辺三角形 ABC に長方形 DEFG が内接している。$BC=10$ , $AH=19$ とする。更に、$EF=x$ とおく。

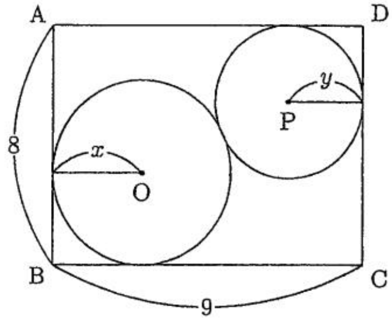



(1) 長方形 DEFG の面積を $x$ を用いて表せ。

(2) この面積の最大値と、そのときの $x$ の値を求めよ。

（2005 龍谷大）

**25.** $AB=8$ , $BC=9$ を辺に持つ長方形 ABCD があり、この長方形の内部に 2 つの円 O と P を描く。円 O の半径は $x$ で辺 AB と辺 BC に接し、円 P の半径は $y$ で辺 AD と辺 CD に接する。また円 O と円 P は 1 点で接する。このとき、次の問いに答えなさい。

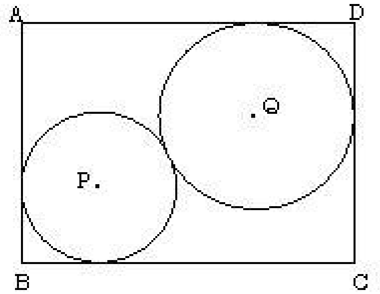



(1) $x+y=5$ になることを示しなさい。

(2) 円 O と円 P の面積の和の最大値と最小値を求めなさい。

（2014 大兵庫県立大）

**26.** $AB=2$ , $BC=3$ の長方形 ABCD の内部に円 P と円 Q が含まれている。ただし、円 P は AB , BC の 2 辺と、円 Q は CD , DA の 2 辺とそれぞれ接している。また、円 P と円 Q は外接している。円 P の半径を $p$ , 円 Q の半径を $q$ とする。




(1) $k=p+q$ とするとき、$k$ の値を求めよ。

(2) $p$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 円 P の面積と円 Q の面積の和を S とするとき、S の最大値と最小値を求めよ。

（2001 大阪市大）

**27.** $a$ は実数とし、$b$ は正の定数とする。$x$ の関数 $f(x)=x^2+2(ax+b|x|)$ の最小値 $m$ を求めよ。さらに、$a$ の値が変化するとき、$a$ の値を横軸に、$m$ の値を縦軸にとって $m$ のグラフをかけ

（2019 京都大）

# §５． ２次関数の最大最小

１. $(a, b) = (-2, 10)$

２. [ア] $= \dfrac{59}{4}$, [イ] $= \dfrac{17}{4}$

３. $-1, 0, 1, 9$

４. $-8$

５. [ア] $= -1$, [イ] $= -3$

６. 最大値 $\dfrac{405}{16}\left(x = \dfrac{3}{2}\right)$

最小値 $= -20\ (x = 4)$

７. [ア] $= 1$, [イ] $= 2$, [ウ] $= 160$

[エ] $= -\dfrac{4}{3}$, [オ] $= \dfrac{-6+\sqrt{21}}{3}$

８. [ア] $= 1$, [イ] $= 3$, [ウ] $= 1$

[エ] $= 38$

９. $(a, b) = (-1, -3), (-5, 21)$

10. (1) $-2 \leqq k \leqq -1,\ 0 \leqq k \leqq 1$

(2) $\mathrm{M} = -8k^2 - 8kx + 17$　(3) $1$

11. (1) $0 < a \leqq \dfrac{2}{3} \to -9a^2 + 12a\ (x = 3)$

$a > \dfrac{2}{3} \to 4\left(x = \dfrac{2}{a}\right)$

(2) $\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2},\ 1 \leqq a \leqq \dfrac{3}{2}$

12. (1) $p \leqq 1 \to m = -p^2 + p + 1$

$p > 1 \to m = -p + 2$　(2) $\dfrac{1}{2}$

13. (1) 略　(2) $\dfrac{1}{4}\left(t = \dfrac{1}{2}\right)$

14. (1) $g = m^2 + 4m$

(2) $m < -\dfrac{7}{2} \to g = m^2 + 8m + 10$

$-\dfrac{7}{2} \leqq m \leqq \dfrac{2}{3} \to g = m - \dfrac{9}{4}$

(3) $-6\ (m = -4)$

15. (1) $m\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{16}$

(2) $m(a)=\begin{cases}2a^2+3a+2\left(a<-\frac{2}{3}\right)\\ 1-\frac{a^2}{4}\left(-\frac{2}{3}\leqq a\leqq\frac{2}{3}\right)\\ 2a^2-3a+2\left(a>\frac{2}{3}\right)\end{cases}$

(3) $\frac{7}{8}$

16. (1) $b=\frac{a+1}{a}$ (2) $M(a)=a\left(1+\frac{1}{a}\right)^2$

$0<a\leqq 1$ → $m(a)=a\left(1-\frac{1}{a}\right)^2$

$a>1\to m\,(a)=0$

(3) $4\ (\ a=1\ )$

17. 最大値 $\frac{9}{8}\left(x=\frac{5}{4}\,,\ y=-\frac{1}{4}\right)$

最小値 $-2\ (\ x=0\ ,y=1\ )$

18. 最大値 $\frac{5}{4}\left(x=\frac{1}{2}\,,\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

最小値 $-1\ (\ x=-1\ ,y=0\ )$

19. 最大値 $10\left(x=1\,,\ y=\pm\sqrt{3}\right)$

最小値 $-8\ (\ x=-2\ ,y=0\ )$

**20.** $\frac{7}{4}\left(x=-\frac{1}{8}\,,\ y=\frac{11}{8}\right)$

**21.** [ア] $=28$ , [イ] $=\frac{63}{4}$

22. [ア] $=2$ , [イ] $=-2$ , [ウ] $=6$

[エ] $=-7$ , [オ] $=-2$ , [カ] $=\frac{7}{2}$

[キ] $=-1$ , [ク] $=\frac{10}{3}$

23. (1) $0<x<\frac{2}{3}$

(2) $0<x<\frac{2}{3}$ → $S(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$

$\frac{2}{3}\leqq x\leqq 1\to S(x)=-\sqrt{3}(x-1)^2+\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x=1\right)$

24. (1) $-\frac{19}{10}x^2+19x$ (2) $\frac{95}{2}\left(x=5\right)$

25. (1) 略

(2) 最大値 $17\pi$

最小値 $\frac{25}{2}\pi$

26. (1) $k=5-2\sqrt{3}$ (2) $4-2\sqrt{3}\leqq p\leqq 1$

(3) 最大値 $(29-16\sqrt{3})\pi$

最小値 $\frac{1}{2}(37-20\sqrt{3})\pi$

27. 略