§７　方程式の計算

１．　方程式 $x^2+3x-5=2|x|$ を解け。

（1991 常盤大）

２．方程式 $x^2+x+|x-1|=5$ を解け。

（2008 金沢工大）

３．$|x|+2|x-1|=x+3$ の解を求めよ。

（2004 明治大）

４．a, b, c, d が実数のとき、次のことを証明せよ。

(1) x, y に関する方程式 $ax+by=0$ は $(x, y)=(0, 0)$ 以外の解をもつ。

(2) x, y, z に関する方程式 $ax+by=0$, $cx+dy+ez=0$ は $(x, y, z)=(0, 0, 0)$ 以外の解をもつ。

（1990 愛知大）

５．(1) $x^3+y^3+1-3xy$ を因数分解せよ。

(2) k は -1 ではない実数の定数とする。$x+y=k$ であるとき、$x^3+y^3-3xy+1=0$ を満たす実数 x, y があるような k の値と、そのときの x, y の値を求めよ。

（2008 関西大）

６．濃度の異なる 2 つの食塩水 A, B がそれぞれ 1000g ある。A の濃度は 1%である。A を ag, B を bg 混ぜると、濃度 2%の食塩水を 100g 作ることができる。ところが、A, B の混ぜるべき量を逆にしたため、2%の食塩水にならなかった。

　そこで、混ぜた食塩水の中 75g を捨て、代わりに同じ量だけ A を足したら、濃度 2%の食塩水になった。a, b はそれぞれ何 g か。また、B の食塩水の濃度は何%か。

（1991 中央大）

７．次の２つの等式を同時に満たす x, y の値の組 (x, y) をすべて求めよ。

$$\begin{cases} x^2-y^2+x+y=0 \\ x^2-3x+2y^2+3y=9 \end{cases}$$

（2003 関西大）

８．次の連立方程式の x の解を求めよ。

$$x+\sqrt{2}y-\sqrt{3}z=0 \ ,\ (\sqrt{2}-1)\sqrt{3}x-\sqrt{3}y+z=0 \ ,\ \frac{x}{y^2+z^2}+\frac{\sqrt{2}y}{z^2+x^2}+\frac{\sqrt{3}z}{x^2+y^2}=1$$

（2004 法政大）

９．x , y の連立方程式 $\begin{cases} x+4y=kx \\ 2x+3y=ky \end{cases}$ が $x=0$, $y=0$ 以外の解をもつとき、k の値を求めよ。

（1991 創価大）

10. a を実数の定数として、x , y の連立方程式 $\begin{cases} (a+2)x+3y=a \\ (2a-1)x+ay=3 \end{cases}$ を考える。

⑴ $a=4$ のとき、x , y はそれぞれ $x=$［ ア ］, $y=$［ イ ］である。

⑵ 連立方程式がただ 1 つの解をもつのは、$a\neq 3$ かつ $a\neq$［ ウ ］のときである。

⑶ 連立方程式がただ 1 つの解をもつとき、x , y はそれぞれ $x=$［ エ ］, $y=$［ オ ］である。

（2006 関東学院大）

11. a と b を実数の定数とする。x, y, z を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x+2y+5z=3 \\ \quad ay+2z=2 \\ \quad 8y+bz=5 \end{cases}$$ を考える。

⑴ この連立 1 次方程式がただ 1 組の解をもつために a と b が満たすべき必要十分条件を与え、その条件のもとで解を求めよ。

⑵ この連立 1 次方程式が無数に多くの解をもつために a と b が満たすべき必要十分条件を与え、その条件のもとで解をもれなく求めよ。

（2004 岐阜大）

12. 方程式 $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)=-24$ について、$X=x^2-x$ とおくと、X の 2 次方程式［ ア ］$=0$ を得る。その解は $X=$［ イ ］,［ ウ ］（ただし［ イ ］<［ ウ ］である。）元の方程式の最大の解は $x=$［ エ ］である。

（2011 関西学院大）

13. 2 次程式 $x^2+(3a-2)x+2a^2-2a+1=0$ が実数解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

（2002 山梨学院大）

14. 座標平面上の点 (x, y) が次の方程式を満たす。

$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$

このとき、x のとりうる最大の値を求めよ。

（2012 東京大）

15. 実数 x , y は方程式 $3x^2-2xy+2y^2-4x+5y+2=0$ を満たす。

⑴ y のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) この方程式の解で、x のというる最大の値を求めよ。

(2004 早稲田大)

16. m を実数とするとき、2 つの 2 次方程式 $2x^2+8x+2m=0$ … ①
$x^2+mx+2m-4=0$ … ②が共通な解をもつのは、$m=$[ア]または $m=$[イ]のときである。ただし、[ア] > [イ]とする。$m=$[ア]のとき、①と②の共通の解は $x=$[ウ]であり、$m=$[イ]のとき、①と②の共通の解は $x=$[エ]である。

(2011 関西学院大)

17. 2 つの 2 次方程式 $x^2-3x+m-1=0$, $x^2+(m-2)x-2=0$ が共通な実数解をただ 1 つもつとき、m の値とその共通解を求めよ。

(2006 南山大)

18. x についての 2 次方程式 $x^2-ax+5b=0$, $x^2-bx+5a=0$ がただ 1 つの共通解をもつとき、共通でない解の和を求めよ。

(1990 青山学院大)

19. 2 次方程式 $2x^2+kx-20=0$ の解を α, β とし、$x^2+kx-4=0$ の解を α, γ とする。ただし、共通の解 α は正とする。このとき$\alpha=$[ア]であり、$k=$[イ]である。β, γ を解にもつ 2 次方程式は[ウ]x^2+7x+[エ]$=0$ となる。また、2 次不等式[ウ]x^2+ax+[エ]>0 の解がすべての実数となるような定数 a の値の範囲は[オ]である。

(2010 関西学院大)

20. 2 次方程式 $x^2-2\sqrt{7}x-2=0$ の正の解を p とすると、$p=$[ア]である。p の整数部分を a, 小数部分を b とすると $a=$[イ], $b=$[ウ]である。このとき、$b^4+88b-7=$[エ]である。

(2007 同志社大)

21. 2 次方程式 $x^2-px+1=0$ の 2 つの解を α, β とし、2 次方程式 $x^2-x+q=0$ の 2 つの解を α', β' とする。このとき、$(\alpha'-\alpha)(\alpha'-\beta)(\beta'-\alpha)(\beta'-\beta)$を p, q を用いて表せ。

(1991 滋賀大)

22. 2 つの 2 次方程式 $x^2+ax+3a=0$, $x^2-ax+a^2-1=0$ が、ともに実数解をもつような実数 a の値の範囲は[ア]である。

(京都産業大)

23. x に関する 2 つの方程式 $x^2+ax+a+3=0$ … ① , $x^2-2ax+8a=0$ … ②について考える。①が実数の解をもつ定数 a の値の範囲は[ア]であり、① ,②ともに実数の解をもつ定数 a の値の範囲は[イ], どちらか一方だけが実数の解をもつ定数 a の値の範囲は[ウ]である。

(2000 京都産業大)

24. 実数とする。2 次方程式 $x^2+ax+a^2+ab+2=0$ は、定数 a がどのような値であっても、決して実数解をもたないとする。実数 b はどのような範囲にあるか求めよ。

（1991 龍谷大）

25. x の 2 次方程式 $x^2+mx-m+8=0$ について、次の問に答えよ。

(1) $m=5$ のときの解を求めよ。

(2) $m>0$ とする。解が重解となるときの m の値、およびこの時の重解を求めよ。

(3) 2 つの相異なる実数解をもつときの m の範囲を求めよ。

(4) 解の 1 つが 2 であるときの m の値を求めよ。また、この時の他の解を求めよ。

（2008 札幌大）

26. $0<a<2$ の範囲で、x についての方程式 $x^2-2ax-2x+2a^2-6=0$ の実数解がとりうる値の範囲を求めよ。

（神戸学院大）

27. 実数を係数とする 2 次方程式 $x^2+2mx+2m+3=0$ が虚数解をもち、その解の実部が正であるとき、m の値の範囲を求めよ。また、この方程式が相異なる実数解をもち、2 つの解の差の絶対値が 2 より小さいとき、m の値の範囲を求めよ。

（2008 南山大）

28. $f(x)$は $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-2x+3}$ で定義される関数とする。

(1) 方程式 $f(x)=a$ が実数の解をもつような a の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$が最大値をとる x の値と最小値をとる x の値を求めよ。

（2003 追手門学院大）

29. 2 次方程式 $x^2+(2m+5)x+(m+3)=0$ が整数の解をもつための整数 m の値をすべて求めよ。

（2007 神戸薬大）

30. a, x を自然数とする。$x^2+x-(a^2+5)=0$ をみたす a, x の組をすべて求めよ。

（2010 京都教育大）

31. x の 2 次方程式 $x^2-mnx+m+n=0$（ただし、m, n は自然数）で 2 つの解がともに整数となるものは何個あるか。

（2007 早稲田大）

32. 2 つの放物線 $\begin{cases} y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta \\ y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta \end{cases}$ が相異なる 2 点で交わるような一般角 θ の範囲を求めよ。

（2002 東京大）

§７．方程式

1.　$x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2},\dfrac{-5-3\sqrt{5}}{2}$

2.　$x=-2,-1+\sqrt{7}$

3.　$x=\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{4}$

4.（1）略　（2）略

5.（1）$(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)$
（2）$(k,x,y)=(2,1,1)$

6.　$(a,b)=(80g,20g)$　$B=6\%$

7.　$(x,y)=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3}\right)$，$(3,-3),(-1,1),$
$(-2,-1)$

8.　$x=\dfrac{17}{10}$

9.　$k=-1,5$

10.（1）［ア］$=\dfrac{7}{3}$，［イ］$=-\dfrac{10}{3}$　（2）［ウ］$=1$
（3）［エ］$=\dfrac{a+3}{a-1}$　［オ］$=-\dfrac{2(a+1)}{a-1}$

11.（1）$(x,y,z)=$
$\left(\dfrac{3ab-25a-4b+52}{ab-16},\dfrac{2b-10}{ab-16},\dfrac{5a-16}{ab-16}\right)$
（2）$(x,y,z)=(30t-2,5t,-8t+1)$

12.［ア］$=X^2-14X+48$，［イ］$=6$，
［ウ］$=8$　［エ］$=\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}$

13.　$a\leqq 0,4\leqq a$

14.　$\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

15.（1）$-2\leqq y\leqq -\dfrac{1}{5}$
（2）$(x,y)=(0,-2),(1,-1)$

16.［ア］$=4$［イ］$=3$［ウ］$=-2$［エ］$=-1$

17.　$m=3$　共通解 $x=1$

18.　5

19.［ア］$=4$［イ］$=-3$［ウ］$=2$［エ］$=5$
［オ］$-2\sqrt{10}<a<2\sqrt{10}$

20.［ア］$=\sqrt{7}+3$，［イ］$=5$
［ウ］$=\sqrt{7}-2$，［エ］$=50$

21.　$2-p-2q-pq+p^2q+q^2$

22.　$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\leqq a\leqq 0$

23.［ア］$a\leqq -2,6\leqq a$［イ］$a\leqq -2,8\leqq a$
［ウ］$-2\leqq a\leqq 0,6\leqq a<8$

24.　$-\sqrt{6}<b<\sqrt{6}$

25.（1）$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$（2）$m=4,x=-2$

26.　$1+\sqrt{7}<x<3+\sqrt{7}$，$1-\sqrt{7}<x<3-\sqrt{7}$

(3) $m < -8$, $4 < m$ (4) $m = -12$, $x = 10$

27. $-1 < m < 0$,

$1-\sqrt{5} < m < -1$

$3 < m < 1+\sqrt{5}$

28. (1) $-\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$

(2) 最大値 $x = -1$ 最小値 $x = 2$

29. $m = -1 , -3$

30. $(a , x) = (5 , 5) , (1 , 2)$

31. 3 つ

32. $\frac{4\pi}{3} + 2n\pi < \theta < \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$