§８　方程式の解の配置問題

１．x についての 2 次方程式 $x^2-2px+2p+1=0$ が次のような異なる 2 つの実数解をもつとき、定数 p の値の範囲を求めよ。ただし、p は実数とする。

(1) 2 つの解がともに正

(2) 2 つの解がともに負

(3) 1 つの解が正，他の解が負

（2006 富山県立大）

２．2 次方程式 $x^2+(2-4k)x+k+1=0$ が正の重解をもつとする。このとき、定数 k の値は $k=$ [　　] であり、2 次方程式の重解は $x=$ [　　] である。

（慶応義塾大）

３．a は自然数とする。2 次方程式 $x^2-2(a-4)x+2a=0$ の異なる 2 つの実数解がともに 2 より大きくなるとき、a の値を求めよ。

（2006 摂南大）

４．x の 2 次方程式 $x^2-2(3m-1)x+9m^2-8=0$ が次の条件を満たすような実数 m の値の範囲を、それぞれ求めよ・

(1) 相異なる 2 つの実数解をもつ。

(2) 相異なる実数解をもち、2 つの解がともに正である。

(3) 相異なる実数解をもち、一方は正，他方の解が負である。

（岐阜女子大）

５．2 次方程式 $x^2-2ax+a+12=0$ の 2 つの解が、ともに 1 より大きくなるのは、a がどんな値のときか。

（青山学院大）

６．2 次方程式 $x^2+ax+a=0$ が異なる 2 つの実数解をもち、その絶対値が 1 より小さい。このような実数 a の値の範囲を求めよ。

（信州大）

７．x に関する 2 次方程式 $x^2+(4a+1)x+a^2=0$ が異なる 2 つの実数解をもち、その 2 解のうち、ただ 1 つが 0 と 1 の間（0 と 1 を含める）にあるための a のとるべき実数値の範囲を求めよ。

（京都大改）

８． 2 次方程式 $x^2-2(a-1)x+(a-2)^2=0$ について、次の問いに答えよ。

(1) 実数解をもつための定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) 2 つの解を α,β としたとき、$0<\alpha<1<\beta<2$ となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

（立教大）

９. 実数係数の 2 次方程式 $x^2-2ax+3a=0$ が 2 以上の異なる 2 つの実数解をもつとき、a の値の範囲を求めよ。

（東京工科大）

10. k を実数とする。x の 2 次方程式 $8x^2-8|k-1|x+8k^2-4k+1=0$ について

(1) この方程式が実数解をもつとき、k の値の範囲を求めよ。

(2) この方程式が異なる 2 つの実数解をもつとき、2 つの解がともに 0 と 1 の間にあることを証明せよ。

（甲南大）

11. x に関する 2 次方程式 $x^2-ax+2=0$（ただし、a は実数の定数）は範囲　$I:-3\leqq x\leqq-1$ で少なくとも 1 つの解をもつという。このときの a の値の範囲を調べたい。

(1) この方程式の 2 つの解が両方とも範囲 I に入る（重解が I に入るときも含む）とき、a の値の範囲を求めよ。

(2) この方程式の 1 つの解は I に入り、もう 1 つの解は I に入らないとき、a の値の範囲を求めよ。

(3) この方程式の少なくとも 1 つの解が I に入るとき、a の値の範囲を求めよ。

（名古屋学院大）

12. a,b は実数 ，$b>0$ とする。2 次方程式 $(1-x)(a-x)=\dfrac{1}{b}$ について

(1) 少なくとも 1 つの正の解をもつことを示せ。

(2) 1 つだけ正の解をもつとき、a,b の満たす関係式を求めよ。

（首都大）

13. 2 次方程式 $x^2-(3a-2)x+2a^2-2a+1=0$ が実数解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

（山梨学院大）

14. 2 つの方程式 $x^2+ax+a+3=0$ … ①, $x^2-2ax+8a=0$ … ②について考える。①が実数の解をもつ定数 a の値の範囲は[ア]であり、①, ②ともに実数の解をもつ定数 a の値の範囲は[イ], どちらか一方だけが実数の解をもつ定数 a の値の範囲は[ウ]である。

（京都産業大）

15, a を実数とするとき、2 次方程式 $x^2+2ax-a-2=0$ の 2 つの解の絶対値がともに 1 より大きいような a の範囲を求めよ。

（日本大）

16. a は自然数とする。2 次方程式 $x^2-2(a-4)x+2a=0$ の異なる 2 つの実数解がともに 2 より大きくなるとき、a の値を求めよ。

（摂南大）

17. 2 次方程式 $x^2-(a-2)x+\dfrac{a}{2}+5=0$ が $1 \leqq x \leqq 5$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつための実数 a の値の範囲を求めよ。

（同志社大）

解答

１．(1) $1+\sqrt{2}<p$ (2) $-\frac{1}{2}<p<1-\sqrt{2}$ (3) $p<-\frac{1}{2}$

２．順に$\frac{5}{4},\frac{3}{2}$

３．$a=9$

４．(1) $m<\frac{3}{2}$ (2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}<m<\frac{3}{2}$ (3) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}<m<\frac{2\sqrt{2}}{3}$

５．$4 \leqq a<13$

６．$-\frac{1}{2}<a<0$

７．$a=0, -2-\sqrt{2} \leqq a<-2+\sqrt{2}$

８．(1) $a \geqq \frac{3}{2}$ (2) $3-\sqrt{3}<a<2$

９．$3<a \leqq 4$

10. (1) $-\frac{1}{\sqrt{6}} \leqq k \leqq \frac{1}{\sqrt{6}}$

(2) (1)より，2次方程式 $f(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつためには，$D>0$ であればよいから，$-\frac{1}{\sqrt{6}}<k<\frac{1}{\sqrt{6}}$ である．

このとき，$k-1<\frac{1}{\sqrt{6}}-1<0$ であることから，$|k-1|=-(k-1)$

したがって

$$f(x)=8x^2+8(k-1)x+8k^2-4k+1$$

ここで

$$f(0)=8k^2-4k+1=8\left(k-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}>0 \quad \cdots\cdots①$$

$$f(1)=8+8(k-1)+8k^2-4k+1=8k^2+4k+1=8\left(k+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}>0 \quad \cdots\cdots②$$

また，$y=f(x)$ の軸 $x=-\frac{8(k-1)}{2\cdot 8}=-\frac{k-1}{2}$ について

$$-\frac{1}{\sqrt{6}}<k<\frac{1}{\sqrt{6}} \text{ から } \frac{-\frac{1}{\sqrt{6}}-1}{2}<\frac{k-1}{2}<\frac{\frac{1}{\sqrt{6}}-1}{2}$$

ゆえに

$$0<\frac{6-\sqrt{6}}{12}<-\frac{k-1}{2}<\frac{6+\sqrt{6}}{12}<1 \quad \text{より} \quad 0<-\frac{k-1}{2}<1 \quad \cdots\cdots③$$

よって，①，②，③から，2つの解はともに0と1の間にある．

11. (1) $-3 \leqq a \leqq -2\sqrt{2}$ (2) $-\frac{11}{3} \leqq a < -3$ (3) $-\frac{11}{3} \leqq a \leqq -2\sqrt{2}$

12. (1) $f(x)=(1-x)(a-x)-\frac{1}{b}$ とおく.

$y=f(x)$ のグラフは,（x^2 の係数）>0 より下に凸で,

$b>0$ から $f(1)=-\frac{1}{b}<0$

よって, 方程式 $f(x)=0$ は, 1 より大きい解と小さい解を 1 つずつもつことがわかる.

したがって, 少なくとも 1 つの正の解をもつ.

(2) $ab \leqq 1$

13. $a \leqq 0$, $4 \leqq a$

14. [ア] $a \leqq -2$, $6 \leqq a$ [イ] $a \leqq -2$, $8 \leqq a$ [ウ] $-2 \leqq a \leqq 0$, $6 \leqq a < 8$

15. $-\frac{1}{3} < a < 1$

16. $a = 9$

17. $8 < a \leqq \frac{80}{9}$