§９－２　場合の数２

１．(1) n 角形の対角線の総数を $f(n)$ とすると、$f(4)=$［ ア ］, $f(5)=$［ イ ］,
$f(n)=$［ ウ ］である。

(2) n 角形の 3 つの頂点を結んでできる三角形のうち、n 角形と 1 つの辺も共有しないような三角形の総数を $g(n)$ とすると、$g(6)=$［ エ ］, $g(7)=$［ オ ］, $g(n)=$［ カ ］である。ただし、$n \geqq 4$ とする。

（近畿大）

２．(1) 同じ種類の 6 冊のノートを 3 人に配る配り方は何通りあるか。

(2) 同じ種類の 6 冊のノートを 3 人とも少なくとも 1 冊配る配り方は何通りあるか。

(3) 異なる 6 台のミニチュアカーを 3 人に配る配り方は何通りあるか。

(4) 異なる 6 台のミニチュアカーを 3 人とも少なくとも 1 台配る配り方は何通りあるか。

（中央大）

３．15 冊の異なる本を次の条件を満たすように分けるとき、分け方の方法の個数を求めよ。

(1) 6 冊、5 冊、4 冊の 3 組に分ける。

(2) 5 冊ずつ 3 人の子供に分ける。

(3) 5 冊ずつ 3 組に分ける。

（聖隷クリストファー大）

４．x , y , z はすべて正の整数とする。$x+y+z=10$ をみたす x , y , z の組は全部で［ ア ］個あり、そのうち、$x=2y$ をみたす組は［ イ ］個あり、$x<y$ をみたす組は［ ウ ］個ある。

（同志社大）

５．n を 3 以上の整数とし、a , b , c は 1 以上 n 以下の整数とする。

(1) $a<b<c$ となる a , b , c の組は何通りあるか。

(2) $a \leqq b \leqq c$ となる a , b , c の組は何通りあるか。

(3) $a<b$ かつ $a \leqq c$ となる a , b , c の組は何通りあるか。

（岡山大）

６．さいころを４回投げて k 回目に出た目を a_k （$k=1,2,3,4$）とする。

$a_1<a_2<a_3<a_4$ となる目の出方は[ア]通りある。

$a_1 \leqq a_2<a_3 \leqq a_4$ となる目の出方は[イ]通りある。

（福岡大）

７．数 1 , 2 , 3 を書いた紙がそれぞれ 2 枚ずつ、計 6 枚ある。ただし、同じ数が書かれた紙は区別しない。

(1) 6 枚の中から任意に 3 枚を取り出し、それを横 1 列に並べる場合、異なる並べ方は全部で何通りあるか。

(2) (1)において、隣り合う 2 枚の紙に書かれた数を比べた場合、左の紙の数よりも右の紙の数の方が小さくない並べ方は全部で何通りあるか。

（図書館情報大）

８．n を自然数とする。次の 3 つの不等式(1),(2),(3)をすべて満たす自然数の組（a,b,c,d）はいくつあるか。n を用いて表せ。

(1) $1 \leqq a<d \leqq n$

(2) $a \leqq b<d$

(3) $a<c \leqq d$

（京都大）

９．下図のような立方体 ACD－EFGH の各頂点に白または赤の色を塗る。ただし、立方体の面を構成する 6 つの正方形それぞれについて、その 4 つの頂点をすべて同じ色で塗ってはならないとする。このとき、以下の問いに答えよ。

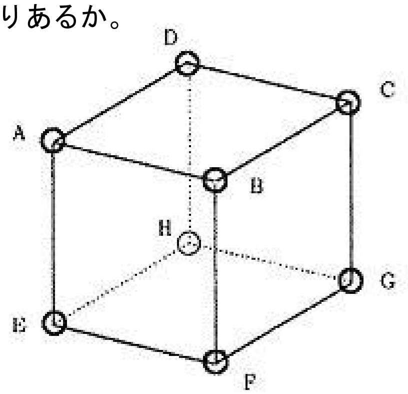
(1) 赤で塗られる頂点の個数が 2 個のとき、塗り方は全部で何通りあるか。

(2) 赤で塗られる頂点の個数が 3 個のとき、塗り方は全部で何通りあるか。

(3) 赤で塗られる頂点の個数が 4 個のとき、塗り方は全部で何通りあるか。

(4) 塗り方は全部で何通りあるか。

（神戸大）



10. n を 3 以上の自然数とする。正 n 角形の頂点から相異なる 3 点を選んで三角形を作るとき、その三角形が二等辺三角形となる場合の数を a_n とする。

(1) a_6, a_7 をそれぞれ求めよ。

(2) 自然数 k に対して、a_{6k}, a_{6k+1} をそれぞれ k を用いて表せ。

（大阪府立大）

11. 正五角柱の 7 つの面（2 つの底面と 5 つの側面）を赤黄青緑紫茶黒の 7 つの色を 1 色ずつ用いて塗り分ける方法の数を考える。このとき、この五角柱を回転したり倒したりして同じになる塗り方は 1 通りとする。

(1) 1 つの底面に赤色を塗り、1 つの側面に黄色を塗ることにしたとき、塗り方は何通りあるか。

(2) 2 つの底面にそれぞれ赤色と黄色を塗ることにしたとき、塗り方は何通りあるか。

(2) 塗り方は全部で何通りあるか。

（仏教大）

12. さいころの 6 つの面の中から 2 面を選んで赤色に塗る。残った 4 面の中から 2 面を選んで黒色に塗る。最後に残った 2 面は白色に塗る。なお色を塗ってもさいころの目は判別できるものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 上のような各面への色の塗り方は全部で何通りあるか。

(2) 赤い面が向かい合うような、各面への色の塗り分け方は何通りあるか。

(3) 赤い面が隣り合うような、各面への色の塗り分け方は何通りあるか。

(4) 同じ色の面がすべて隣り合うような、各面への色の塗り分け方は何通りあるか。

(5) 同じ色の面がすべて向かい合うような、各面への色の塗り分け方は何通りあるか。

（大阪市立大）

13. 立方体を塗り分けることを考える。辺を共有する面には別の色を塗るものとし、回転して重なるものは同じ塗り方とする。次の塗り分け方は何通りあるか。

⑴ 6 色の色をすべて用いる。

⑵ 5 色の色をすべて用いる。

⑶ 4 色の色をすべて用いる。

（上武大）

14. (1) 正六面体の１つの面を赤、２つの面を白、３つの面を青とする。このような塗り分け方は何通りあるか。
(2) 正八面体の１つの面を赤、１つの面を白、６つの面を青とする。このような塗り分け方は何通りあるか。
(3) 正八面体の１つの面を赤、２つの面を白、５つの面を青とする。このような塗り分け方は何通りあるか。
ただし、(1) (2) (3)のいずれの場合も、回転して同一にできる塗り分け方は、同じものと見なす。

（東京工科大）

15. 数直線上の整数点 $x=1, 2, 3, \cdots, n$ に、合計 n 個の黒または白の石を１つずつ黒石どおしは隣り合わないように置く。黒石を３個使う置き方は何通りあるか。ただし、$n \geqq 5$ とする。

（北海道大）

16. 互いに同形のガラス玉 g 個と、互いに同形のダイヤモンド d 個と、裏表のあるペンダント１個とを、まるくつないでネックレス状のものを作る。ただし、ペンダントの両端はダイヤモンドにする。（$d \geqq 2$, $g \geqq 1$）
(1) 何通りの作り方があるか。
(2) どの２個のダイヤモンドも隣り合わないことにしたら、何通りの作り方があるか。

（京都大）

17. (1) KOKADAI の７文字から作られる順列は全部で [ア] 通りある。これらの順列のうち、母音文字（O , A , I）が隣り合わない順列は[イ]通りあり、文字 O , D がこの順に現れる順列は[ウ]通りある。
(2) それぞれ、同様な白球４個、赤球２個、黒球１個がある。この７個を円形に並べる方法は[エ]通りあり、この 7 個でじゅずを作る方法は[オ]通りある。

（東京工科大）

18. 赤と白のビーズを７個使いネックレスをつくる。ただし、ビーズの形と大きさはすべて同じであり、使わない色があってもよいものとする。このとき、ネックレスのつなぎ目については無視すると、ネックレスの作り方は[ア]通りある。

（早稲田大）

19. 白玉１個、赤玉２個、青玉４個、黄玉６個がある。これを糸でつないで、すきまのないネックレスをつくる。ネックレスの種類の総数を求めよ。ただし、回転または裏返すことにより一致するものは同種類とみなす。

（信州大）

20. n を自然数とする。座標平面上の $2n+2$ 個の点からなる集合

$L=\{(x,y)\mid x,y$ は整数 ，$0\leqq x\leqq n,0\leqq y\leqq 1\}$

のうちの 3 点を頂点とする三角形をすべて考える。これらの三角形の面積の総和を求めよ。

（早稲田大）

21. n は自然数とする。３本の直線 $3x+2y=6n$, $x=0$, $y=0$ で囲まれる三角形の周および内部にあり、x 座標と y 座標がともに整数である点は全部で幾つあるか。

（大阪府立大）

22. n を 4 以上の整数とする。1 番から n 番までの番号のついた n 個の箱に合計 n 個の玉を入れる。ただし、1 つの箱に入る玉の数は 0 個 , 1 個 , 2 個のいずれかである。玉が入っていない箱を空き箱という。空き箱が 1 個であるような入れ方は[ア]通りである。
1 番と 2 番の箱のみが空き箱であるような入れ方は[イ]通りである。
空き箱が 2 個であるような入れ方は[ウ]通りである。
r を 1 以上 n 以下の整数とする。空き箱が r 個であるような入れ方が a_r 通りであるとする。$a_r>0$ となるための r の条件は[※]である。r が[※]を満たし、$r\geqq 2$ のとき、
$\dfrac{a_r}{a_{r-1}}$ を n , r で表すと[エ]である。

（京都産業大）

23. 次の問いに答えよ。

(1) 生徒６人から２人ずつの組を３組作る作り方の総数を求めよ。

(2) 生徒１４人から２人ずつの組を n 組（$n=1,2,\cdots,7$）作る作り方の総数を S_n とする。S_n を n の式で表せ。

(3) $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}>1$ を満たす n をすべて求めよ。

(4) S_n を最大にする n をすべて求めよ。

（神戸大）

24. 5 人の客がホテルのフロントにそれぞれコートをあずけ、帰りに、2 人だけがそれぞれ自分のコートを受け取り、残り 3 人がそれぞれ自分のコートと異なるコートを渡される場合の数は[ア]である。

また、すべての 5 人がそれぞれ自分のコートと異なるコートを渡される場合の数は[イ]である。

（東北学院大）

25. 座標平面上において、点（x , y）から点（$x+1$, y）または点（x , $y+1$）への移動をN 型移動といい、点（x , y）から点（$x+1$, $y+1$）への移動を S 型移動という。n を３以上の整数とする。原点 O から出発し、$2n-2$ 回の N 型移動と１回の S 型移動を組み合わせては点（n , n）に到着する経路の総数を $A(n)$ とする。また、このような経路のうち、S 型移動を k 回目の移動として含む経路の総数を $B(n\,,k)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $A(3)$ を求めよ。

(2) $B(4\,,1)$ ，$B(4\,,2)$ をそれぞれ求めよ。

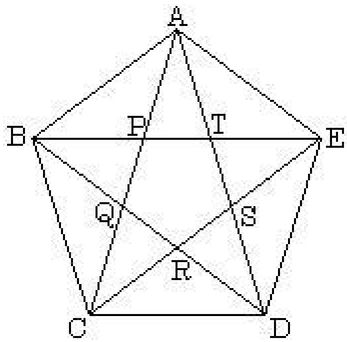
(3) $B(n\,,1)$ を n を用いて表せ。

(4) 一般の $k=2\,,3\,,\cdots,2n-1$ に対して、$B(n\,,k)$ を $n\,,k$ を用いて表せ。

ただし，$p\,,q\,,r$ を非負の整数とし、$p \leqq q \leqq r$ とするとき、$\sum_{i=0}^{p} {}_pC_i \cdot {}_rC_{q-i} = {}_{p+r}C_q$ が成り立つことを用いてもよい。

（大阪府立大）

26. 正五角形 ABCDE の頂点 A と C , C と E , E と B , B と D , D と A をそれぞれ結んだ５本の対角線を考える。それらは図のように P , Q , R , S , T で交わる。この５つの点 P , Q , R , S , T にそれぞれ１枚ずつ、裏表が定まったコインが置かれ固定されているとする。



今、裏表が定まっていて互いに区別のつかない５枚のコインを新たに用意し、５つの点 A , B , C , D , E 上に１まいずつ置く。

すると各対角線上にはそれぞれ４枚のコインが並ぶことになる。どの対角線上にも表のコインが偶数枚置かれているような、A , B , C , D , E 上へのコインの置き方は何通りあるか。

（名古屋大）

27. 自然数 n をそれより小さい自然数の和として表すことを考える。ただし、$1+2+1$ と $1+1+2$ のように和の順序が異なるものは別の表し方とする。例えば、自然数 2 は $1+1$ の１通りの表し方ができ、自然数個 3 は $2+1$, $1+2$, $1+1+1$ の３通りの表し方ができる。
次の自然数の表し方は何通りあるか。

(1)　4　　(2)　5　　(3)　2 以上の自然数 n

（大阪教育大）

場合の数２

1. [ア]2， [イ]5， [ウ] $\dfrac{n(n-3)}{2}$

[エ]2 , [オ]7 , [カ] $\dfrac{n(n-4)(n-5)}{6}$

2. (1) 28 (2) 10 (3) 729　(4) 540

3. (1) 630630　(2)756756

(3) 126126

4. [ア]36， [イ] 3， [ウ] 16

5. (1) $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$　(2) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

(3) $\dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$

6. [ア]15， [イ]70

7. (1)24　(2) 7

8. $\dfrac{n^2(n-1)(n+1)}{12}$

9. (1) 4 (2) 32 (3) 64　(4) 136

10. (1) $a_6 = 8, a_7 = 21$

(2) $a_{6k} = 18k^2 - 10k$,

$a_{6k+1} = 18k^2 + 3k$

11. (1) 120　(2) 24　(3) 504

12. (1) 90　(2) 18　(3) 72　(4) 48　(5) 6

13. (1) 30　(2) 15　(3) 6

14. (1) 3　(2) 3　(3) 7

15. $\dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$

16. (1) $\dfrac{(g+d-2)!}{g!(d-2)!}$

(2) $g \geqq d-1 \to \dfrac{(g-1)!}{(g-d+1)!(d-2)!}$

$g < d-1 \to 0$

17. [ア]1260， [イ]36， [ウ]630

[エ]15 , [オ]9

18. 18

19. 6960

20. $\dfrac{n(n+1)^2(n+2)}{6}$

21. $3n^2+3n+1$

22. [ア] $n(n-1)$, [イ] $\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$

[ウ] $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$

[※] $1 \leqq r \leqq \dfrac{n}{2}$

[エ] $\dfrac{(n-2r+2)(n-2r+1)}{r^2}$

23. (1)15 (2) $\dfrac{14!}{2^n \cdot n! \cdot (14-2n)!}$

(3) 1 , 2 , 3 , 4 (4) 5 , 6

24. [ア]20 , [イ]44

25. (1)30 (2) 20 (3) $\dfrac{(2n-2)!}{\{(n-1)!\}^2}$

(4) $\dfrac{(2n-2)!}{\{(n-1)!\}^2}$

26. 2

27. (1)7 (2) 15 (3) $2^{n-1}-1$