

No 9 - 5 コーシーシュワルツの不等式

1. $x + 2y + 3z = 7$ のとき、 $x^2 + y^2 + z^2$ の最小値を求めよ。

(2007 早稲田大)

2. 実数 x, y, z が $x + 2y + 3z = 1$ を満たすならば、 $x^2 + 4y^2 + 9z^2$ は $x = [\text{ア}], y = [\text{イ}], z = [\text{ウ}]$ のとき最小値 $[\text{エ}]$ をとる。

(1991 慶応大)

3. $x > 0, y > 0, z > 0$ とする。 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{4}$ のとき、 $x + 2y + 3z$ の最小値を求めよ。

(2011 神奈川大)

4. a, b, c を $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を満たす実数とすると、 $a + b + c$ の最大値は $[\quad]$ である。

(2008 関西大)

5. x, y, z が負でない実数で、 $x + 2y + 3z = 1$ のとき、 $\sqrt{x} + \sqrt{2y} + \sqrt{3z}$ の最大値を求めよ。

(和歌山大)

6. $x > 0, y > 0, \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 1$ のとき、 $\sqrt{x + y}$ の最小値を求めよ。

(大阪経済大)

7. 実数 x, y, z, t が $x + y + z + t = 6, x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 12$ をみたすとき、 t の最大値・最小値を求めよ。

(横浜国大)

8. $a > 0, b > 0, c > 0$ かつ $a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta < c$ であるとき、不等式 $\sqrt{a} \cos^2 \theta + \sqrt{b} \sin^2 \theta < \sqrt{c}$ が成り立つことを示せ。

(早稲田大)

9. 三角形の3つの辺の長さを a, b, c とし、 $a + b + c = 2s$ とおくとき、次の不等式を証明せよ。

$$\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} \geq 6$$

(大分医大)

10. 関数 $\frac{x+2y+3}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ の最大値を求めよ。

11. $\triangle ABC$ の $\angle A = 30^\circ$, 辺 AB, AC の長さをそれぞれ $2, 3$ とし、また辺 BC 上の点 P から直線 AB, AC に下ろした垂線をそれぞれ PM, PN とする。点 P が辺 BC 上を動くとき、 $\frac{AB}{PM} + \frac{AC}{PN}$ の最小値を求めよ。
(武蔵工大)

解答

1. $\frac{7}{2}$

2. ア $\frac{1}{3}$ イ $\frac{1}{6}$ ウ $\frac{1}{9}$ エ $\frac{1}{3}$

3. 144

4. $\sqrt{3}$

5. $\sqrt{3}$

6. 5

7. $0 \leq t \leq 3$

8. 略

9. 略

10. $\sqrt{14}$

11. $\frac{25}{3}$