

No 9 - 6 相加相乗平均

1. $a > 0, b > 0$ のとき、 $(a + 2b)\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right)$ の最小値を求めよ。

(2003 神奈川大)

2. x, y が $x > 0, y > 0, x + y = 1$ を満たすとき、

(1) $\frac{1}{xy}$ がとりうる値の最小値を求めよ。

(2) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)$ のとり得る値の最小値を求めよ。

(2001 神戸薬科大)

3. x を 0 でない実数とするとき、関数 $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right)$ の最小値を求めよ。

(2011 大阪薬科大)

4. $x > 1$ のとき、 $4x^2 + \frac{1}{(x+1)(x-1)}$ の最小値は [ア] で、そのときの x の値は $\frac{\sqrt{[イ]}}{[ウ]}$ である。

(2019 慶応義塾大)

5. x が 0 以上の実数であるとき、関数 $f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 34}{x^2 - x + 3}$ の最小値を求めよ。

(2018 自治医科大)

6. $x > 0$ のとき、 $x + \frac{1}{x}$ の最小値は [ア] であり、 $x > 0, y > 0$ のとき $\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{4}{x}\right)$ の最小値は [イ] である。また、 x が任意の実数値をとるとき、 $\frac{x+2}{x^2+2x+16}$ の最大値は [ウ] である。

(2018 関西学院大)

7. 実数 a, b が $a > -1, b > -2$ であるとき、次の式の最小値を求めよ。

$$2b + \frac{2}{a+1} + \frac{2a+2}{b+2}$$

(2006 釧路公立大)

8. 実数 x, y が $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 6$ を満たすとする。 $k = \frac{x}{y}, z = \frac{x^2 + 4xy + 9y^2}{xy + 2y^2}$ とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) z を k の式で表せ。

(3) z の最小値とそのときの k の値を求めよ。

(4) z の最小値を与える x の値は 2 つある。それらを α, β とするとき、 $\alpha + \beta$ を求めよ。

(2012 関西学院大)

9. $\sin \theta = t$ とする。 $\cos 2\theta$ を t を用いて表すと、 $\cos 2\theta = 1 - [\text{ア}]t^2$ である。また、 $0 < \theta < \pi$ のとき、 $\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} + 5 \sin \theta$ の最小値は $[\text{イ}]$ である。

(2018 大阪工業大)

10. $x > 0, y > 0, z > 0$ のとき、 $\frac{9xyz}{x^2y + 18y^2z + 12z^2x}$ の最大値は $[\quad]$ である。

(2015 産業医科大)

11. $x > 0$ のとき、 $3x + \frac{1}{x^3}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

(2021 早稲田大)

解答

1. 9

2. (1) 4 (2) 9

3. 2

4. ア 8 イ 6 ウ 2

5. 6

6. ア 2 イ 9 ウ $\frac{1}{6}$

7. 2

8. (1) $-1 \leq k \leq 1$ (2) $\frac{k^2+4k+9}{k+2}$ (3) $k = -2 + \sqrt{5}$ のとき最小値 $2\sqrt{5}$ (4) $-1 \leq k \leq 1$

9. ア 2 イ $2\sqrt{3}$

10. $\frac{1}{2}$

11. $x = 1$ のとき最小値 4