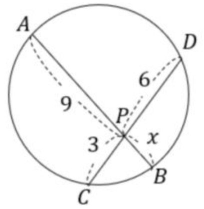
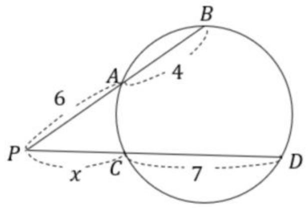
§９　方べきの定理

１．次の図において、x の値を求めよ。

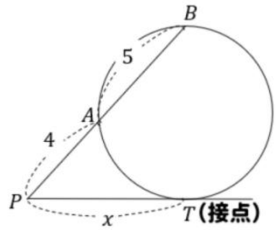
(1)



(2)



(3)

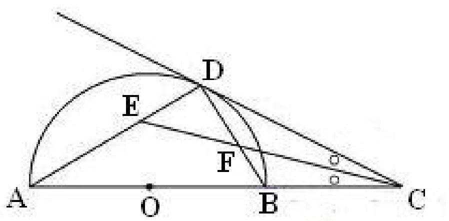


２．正三角形 ABC の辺 BC 上に点 B , C と異なる任意の点 P をとり、直線 AP が正三角形 ABC の外接円 O と交わる点を Q とする。外接円の半径が 1 のとき、AP･AQ = [ア]である。

３．AB を直径とする半円 O がある。円周上の点 D から接線を引き、直線 AB と交わる点を C とする。また、∠ACD の 2 等分線と AD , BD との交点を E , F とする。BC = 4 , CD = 8 のとき、

半円の半径は[ア] , AD = $\dfrac{[\text{ イウ }]\sqrt{[\text{ エ }]}}{[\text{ オ }]}$ である。

また、△DEF の面積は $\dfrac{[\text{ カキ }]}{[\text{ ク }]}$ である。



４．三角形 ABC の辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D，辺 AC を 3 : 5 に内分する点を E とする。4 点 B , C , E , D が同一円周上にあるとき、辺 AB と辺 AC の長さの比 AB : AC を求めよ。

(岩手大)

５．AB = 10 , BC = 9 , AC = 8 である三角形△ABC がある。∠A の二等分線が辺 BC と交わる点を D, 直線 AD と三角形 ABC の外接円との A 以外の交点を E とする。

(1) AD･DE の値を求めよ。

(2) BE･CE の値を求めよ。

（和歌山大）

６．平面上の直線 AT に対し、点 T において円 C が接している。さらに、点 A を通る直線 l が円 C と異なる 2 点で交わっており、その 2 交点のうち点 A に近い方を点 P, 他方を点 Q とする。$AT = 12$, $TP = 6$, $TQ = 8$, $\cos\angle AQT = \dfrac{11}{16}$ であるとき、以下の問に答えよ。

(1) 線分の長さ AP = [ア] , PQ = [イ]

(2) 面積比△APT : △TPQ = [ウ] : [エ]

(3) 円 C の半径は $\dfrac{[\ オカ\ ]\sqrt{[\ キク\ ]}}{[\ ケコ\ ]}$

(4) 三角形 TPQ の内接円が辺 TP と接する点を S とおくと、$SP = \dfrac{[\ サ\ ]}{[\ シ\ ]}$

（2015 関東学院大）

７．△ABC において $AB = 3$, $BC = 1$, $\angle B = 90°$ とする。∠B の二等分線と辺 AC の交点を D とし、A , B , D を通る円と直線 BC の交点のうち点 B と異なる点を E とする. また、直線 AB と直線 DE の交点を F とする。

(1) 線分 AD の長さを求めなさい。

(2) 線分 BE の長さを求めなさい。

(3) 線分 AF の長さを求めなさい。

(2020 大分大)

８．O を原点とする座標平面上において、点 P(3 , 1)を通る直線が $x^2 + y^2 = 1$ 上の 2 点 A , B で交わる。ただし、A と B はそれぞれ第 1 象限, 第 2 象限内の点である。$PA = \sqrt{5}$ のとき、$AB = \dfrac{[\ ア\ ]\sqrt{[\ イ\ ]}}{[\ ウ\ ]}$ であり、△OAB の面積は $\dfrac{[\ エ\ ]}{[\ オ\ ]}$ である。

（2016 東邦大）

９．△ABC において、点 A から辺 BC に垂線 AH を下ろす。線分 AH を直径とする円 O と辺 AB , AC の交点をそれぞれ D , E とし、円 O の半径を 1, $BH = 1$, $CE = 3$ とする。

(1) 線分 DB の長さを求めなさい。

(2) 線分 HC と線分 CA の長さをそれぞれ求めなさい。

(3) ∠EDH の大きさを求めなさい。

（2019 大分大）

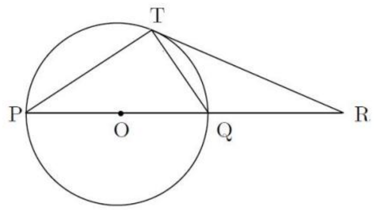
10. 原点 O を中心とする半径 4 の円を C とする。円 C の外部の点 P を通る直線が円 C と異なる 2 点 A , B で交わるとする。PA = 8 , AB = 6 であるとき、OP = [ア]または OP = [イ]である。ただし、[ア] < [イ]とする。

（2017 東海大）

11. 図のように、半径 1 の円 O の直径 PQ の延長線上に PQ = QR となるように点 R をとる。さらに、R より円 O に 1 つの接線を引き、接点を T とする。このとき、

$RT = [\ ア\ ]\sqrt{[\ イ\ ]}$, $\dfrac{PT}{QT} = \sqrt{[\ ウ\ ]}$ であるから、

$PT = \dfrac{[\ エ\ ]\sqrt{[\ オ\ ]}}{[\ カ\ ]}$ である。



（2016 中部大）

12. 点 O を中心とする円 O の円周上に 4 点 A , B , C , D がこの順にある。四角形 ABCD の辺の長さは、それぞれ $AB = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{7}$, $CD = \sqrt{3}$, $DA = 2\sqrt{3}$ であるとする。
点 A における円 O の接線と点 D における円 O の接線の交点を E とすると、
∠OAE =[アイ]° である。また、線分 OE と辺 AD の交点を F とすると、
∠AFW =[ウエ]° であり、OF･OE = [オ]である。
さらに、辺 AD の延長と線分 OC の延長の交点を G とする。点 E から直線 OG に垂線を下ろし、直線 OG との交点を H とする。 4 点 E , G , [カ]は同一円周上にある。
[カ]に当てはまるものを次の①～⑤から一つ選べ。

① C , F　② H , D　③ H , F　④ H , A　⑤ O , A

したがって OH･OG =[キ]である。

（2011 センター本試）

13. △ABC を AB = 3 , BC = 4 , CA = 5 である直角三角形とする。△ABC の内接円の中心を O とし、円が 3 辺 BC , CA , AB と接する点をそれぞれ P , Q , R とする。
このとき、OP = OR = [ア]である。また、円 O と線分 AP との交点のうち P と異なる方を S とする。このとき、$AP = \sqrt{[\ イウ\ ]}$ であり、$SP = \dfrac{[\ エ\ ]\sqrt{[\ オカ\ ]}}{[\ キ\ ]}$ である。

（2010 センター本試）

14. $\triangle$ABC において、AB $= 7$, BC $= 4\sqrt{2}$, $\angle$ABC $= 45°$ とする。また、$\triangle$ABC の外接円の中心を O とする。このとき、CA = [ア]である。

次に外接円 O 上の点 A を含まない弧 BC 上に点 D を CD $= \sqrt{10}$ であるようにとる。

$\angle$ADC = [イウ]° であるから、AD $= x$ とすると x は 2 次方程式

$x^2 -$ [エ] $\sqrt{[\ オ\ ]}\,x -$ [カキ] $= 0$ を満たす。

$x > 0$ であるから AD =[ク] $\sqrt{[\ ケ\ ]}$ となる。

下の[コ],[サ],[シ]には、次の①～⑥のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。ただし、同じ者を繰り返し選んでもよい。

① AC　　② AD　　③ AE　　④ BA　　⑤ CD　　⑥ ED

点 A における外接円 O の接線と辺 CD の延長の交点を E とする。このとき、

$\angle$CAE =$\angle$[コ]E であるから、$\triangle$ACE と$\triangle$D[サ]は相似である。

これより、EA $= \dfrac{[\ ス\ ]\sqrt{[\ セ\ ]}}{[\ ソ\ ]}$ EC である。また、EA^2 =[シ] ･EC である。

したがって、EA $= \dfrac{[\ タチ\ ]\sqrt{[\ ツ\ ]}}{[\ テ\ ]}$ である。

（2008 センター本試）

15. 円O外の1点Pから、この円に2つの接線を引き、その接点をA , Bとする。線分PAの中点MとBとを結ぶ線分MBが円Oと交わる点をCとし、直線PCが円Oと再び交わる点をDとする。

(1) $\angle$APD = $\angle$PDBであることを証明せよ。

(2) 円Oの半径を1 , $\angle$APB = 45° とするとき、線分BDの長さを求めよ。

（1963 大阪大）

解答

１．(1) 2　　(2) 5　　(3) 6

２．3

３．ア 6　イ 2　ウ 4　エ 5　オ 5　カ 3　キ 2　ク 5

４．AB：AC = 3：4

５．(1) 20　(2) $\dfrac{80}{3}$

６．ア 9　イ 7　ウ 9　エ 7　オ 1　カ 6　キ 1　ク 5　ケ 1　コ 5　サ 5　シ 2

７．(1) $\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$　(2) $\dfrac{3}{2}$　(3) $\dfrac{5}{2}$

８．ア 4　イ 5　ウ 5　エ 2　オ 5

９．(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　(2) $HC = 2\sqrt{3}$, $CA = 4$　(3) 60°

10. ア $4\sqrt{2}$　イ $8\sqrt{2}$

11. ア 2　イ 2　ウ 2　エ 2　オ 6　カ 3

12. ア 9　イ 0　ウ 9　エ 0　オ 7　カ 2　キ 7

13. ア 1　イ 1　ウ 0　エ 3　オ 1　カ 0　キ 5

14. ア 5　イ 4　ウ 5　エ 2　オ 5　カ 1　キ 5　ク 3　ケ 5　コ 1　サ 2
シ 3　ス 5　セ 5　ソ 5　タ 1　チ 5　ツ 4　テ 2

15. (1) 略　(2) $\sqrt{2}$