§１１　三角比

１．平地に立っている建物の高さを測るために、その建物の前方の地点 A から測った建物の上端の仰角が $30°$ 、A から建物に向かって 10 m進んだ地点 B から測った仰角が $45°$ であった。この建物の高さを求めよ。

（東北福祉大）

２．$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$　(3)　$\sin^4\theta+\cos^4\theta$　(4)　$\sin^5\theta+\cos^5\theta$

（京都薬科大）

３．$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　(2)　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$　(3)　$\tan^3\theta+\dfrac{1}{\tan^3\theta}$

（東京薬科大）

４．a を定数とし、$f(x)=\cos^2 x+2a\sin x+4a^2\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{6}\right)$ とする。

(1)　定数 a の値を場合分けして、$f(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最大値が 2 となるとき、$f(x)=2$ を満たす x に対する $\tan x$ の値を求めよ。

（山口大）

５．次の条件を満たす三角形 ABC はそれぞれどんな三角形か。

(1)　$c\cos B-b\cos C=0$

(2)　$a^2\sin B\cos A-b^2\sin A\cos B=0$

（法政大）

６．次の問いに答えよ。

(1)　△ ABC が $\sin A+\cos A=1$ を満たすとき、△ ABC はどのような三角形であるか。

(2)　△ ABC が $a\sin A=b\sin B$ を満たすとき、△ ABC はどのような三角形であるか。

(3)　△ ABC が $2\cos B\sin C=\sin A$ を満たすとき、△ ABC はどのような三角形であるか。

（宮城教育大）

７．△ ABC において、頂点 A , B , C の対辺の長さをそれぞれ a , b , c で表す。

(1) $\cos A$ を a , b , c で表せ。

(2) $\dfrac{b+c}{a}\cos A = \dfrac{c+a}{b}\cos B$ が成り立つとき、△ ABC はどのような三角形であるか。

（関西大）

８．△ ABC において、$\dfrac{\sin A + \sin B}{\sin(A+B)} = \cos A + \cos B$ であるとき、△ ABC はどのような三角形であるか。

（関西大）

９． △ ABC において、
$\sin(A+B)\cos(A-B) + \sin(B+C)\cos(B-C) = \sin(C+A)\cos(C-A)$ であるとき、
△ ABC はどのような三角形であるか。

（信州大）

10. △ ABC において、$AB=4$, $AC=5$, $\angle A = 60°$, $\angle A$ の 2 等分線と BC の交点を D とするとき、次の線分の長さを求めよ。

(1) BC　(2) AD　(3) BD

（阪南大）

11. △ ABC で、$\dfrac{\sin A}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sin B}{\sqrt{3}} = \sin C$ が成り立つ。この三角形の角のうちで最大のものの大きさを求めよ。

（福岡大）

12. △ ABC の面積は $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ 、外接円の半径は１、$\angle BAC = 60°$, $AB > AC$ である。このとき、△ ABC の各辺の長さを求めよ。

（千葉大）

13. △ ABC において $AB=2$, $AC=1$ とする。$\angle BAC$ の 2 等分線と辺 BC の交点を D とする。$AD = BD$ となるとき、△ ABC の面積を求めよ。

（京都大）

14. △ ABC は $\angle A = 120°$, $AB \cdot AC = 1$ を満たす。$\angle A$ の 2 等分線との交点を D とする。

(1) $AB = x$ とおいて、AD を x で表せ。

(2) x が動くとき、AD の最大値とそのときの x の値を求めよ。

（北海道大）

15. 辺 AB , BC , CAの長さがそれぞれ12 , 11 , 10の三角形 ABC を考える。$\angle A$ の 2 等分線と辺 BCの交点を D とするとき、線分 ADの長さを求めよ。

（京都大）

16. 半径 R の円周上に点 A , B , C , D がこの順で反時計回りに並んでいる。線分 AB , AC , BC , CDの長さはそれぞれ1 , $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, 2 である。以下の問いに答えよ。

(1) $\cos B$ を求めよ。

(2) 円の半径 R を求めよ。

(3) $\cos D$ を求めよ。

(4) 線分 ADの長さを求めよ。

（首都大東京）

17. 半径 2 の円に内接する四角形 $ABCD$を考える。 $AB = 2\sqrt{2}$, $\angle ADC = 75^\circ$, $\angle BAD = 120^\circ$ とする。このとき、
$\angle BCD =$［ ア ］°, $\angle ADB =$［ イ ］°, $BC =$［ ウ ］,
$AD =$［ エ ］である。また、四角形 $ABCD$の面積は［ オ ］になる。

（立命館大）

18. 辺の長さが5 , 12 , 13である三角形の内接円の半径を求めよ。

（早稲田大）

19. $\triangle ABC$において、 $AB = 5$, $BC = 5\sin A$, $CA = 3$ であるとする。

(1) 辺 BCの長さを求めよ。

(2) $\triangle ABC$の内接円の半径を求めよ。

（千葉大）

20. 3 辺の長さがx^2+x+1 , $2x+1$, x^2-1 である三角形の最大の内角をθとしたとき、$12(1+\cos\theta)$ の値を求めよ。

（自治医科大）

21. 三角形 ABCは各辺の長さが1の正三角形であるとする。辺 AB 上に点 D , 辺 BC 上に点 E , 辺 CA 上に点 F を $AD = BE = CF = x$ となるようにとる。ただし、$0 < x < 1$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 三角形 ABC の内接円の半径を求めよ。

(2) 三角形 DEF の外接円の半径 R を x を用いて表せ。

(3) (2) で求めた R を最小にする x の値を求めよ。

（奈良女子大）

22. y 軸上の 2 点 $A(0, 1)$, $B(0, 2)$ と x 軸上の正の部分を動く点 $P(a, 0)$ を考える。$\theta = \angle APB$ とおくとき、

(1)　$\cos\theta$ を a で表せ・

(2)　θ が最大になる a の値を求めよ。

（北海道大）

23.　x を正の実数とする。三角形 ABC において、 $AB=x$, $BC=x+1$, $CA=x+2$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$\angle B=\theta$ とおくとき、 $\cos\theta$ を x を用いて表せ。

(3)　三角形 ABC が鈍角三角形となる x の値の範囲を求めよ。

（奈良女子大）

24.　$AB=1$, $AC=x$（ただし、$0<x<1$） , $\angle A=60^\circ$ である△ ABC がある。辺 BC 上に点 P を、 $\angle CAP=\angle ABP$ であるようにとる。このとき、 $\angle APC=$[ア]である。 BC , CP , AP をそれぞれ x の式で表すと、 $BC=$[イ], $CP=$[ウ], $AP=$[エ] である。また、△ APB の面積 S を x の式で表すと、 $S=$[オ]である。

（関西学院大）

25.　△ ABC の面積を S 、内接円の半径を r 、３辺の長さを a , b , c とすると、

$$r=\frac{S}{l}\quad,\quad S=\sqrt{l(l-a)(l-b)(l-c)}$$ であることを示せ。

ただし、$2l=a+b+c$ とする。

（大阪教育大）

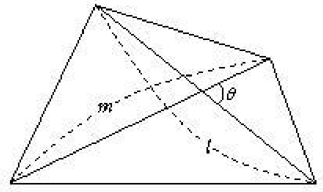
26.　△ ABC において $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ とする。
$(a+b):(b+c):(c+a)=9:11:10$ が成り立つとき、a , b , c の比を簡単な整数比で表すと $a:b:c=$[ア]で、$\cos A$ の値は[イ]となる。さらに、△ ABC の面積が $135\sqrt{7}$ であるとき、 $a=$[ウ]となる。

（北里大）

27.　△右図のような四角形において、対角線の長さを l , m 、対角線のなす角を θ とする。

(1) 四角形の面積 S を l , m , θ を用いてあらわせ。

(2) 対角線の長さの和が k （定数）となる四角形の中で、その面積が最大となるものの面積を求めよ。



（佐賀大）

28. 四角形 $ABCD$ は、 $AD \parallel BC$, $AB=DC$, $AC=BD=a$ （ a は定数）を満たしているとする。 $\angle ADB=\theta$ とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) $x = AD$, $y = BC$ とするとき、AB の長さを a, x, y で表せ。

(2) 四角形 $ABCD$ の面積 S を a と θ で表せ。

(3) S の最大値を a で表せ。また、そのときの θ の値を求めよ。

（香川大）

29. 平行四辺形 $OABC$ は $OA = BC = 1$, $OC = AB = r$, $\angle AOC = \theta$ を満たす。ただし、$r > 0$ かつ $0 < \theta < \pi$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $OB^2 + AC^2$ は θ の値によらず一定であることを示し、その値を r を用いて表せ。

(2) θ が $0 < \theta < \pi$ の範囲を動くとき、$OB + AC$ の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

（大阪教育大）

30. $\triangle ABC$ において $AB = 2$, $AC = 3$, $\angle A = 60^\circ$ のとき、辺 AC 上に $AD = 1$ となる点 D をとる。さらに E を BC 上の点とする。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2) 線分 DE が $\triangle ABC$ の面積が二等分するとき、線分 BE の長さを求めよ。

(3) $\triangle ABE$ と $\triangle DEC$ の面積の積 T を最大に刷る線分 BE の長さと、そのときの T の値を求めよ。

（千葉大）

31. 四角形 $ABCD$ について考える。2 つの対角線の長さは $AC = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$, $BD = 3$ であり、これら 2 つの対角線の成す鋭角が 60° であるとする。四角形 $ABCD$ の面積を求めよ。

（自治医科大）

32. 次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

(a) 少なくとも 2 つの内角は 90° である。

(b) 半径 1 の円が内接する。ただし、円が四角形に内接するとは、円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。

（京都大）

33. r を正の定数とし、n を 3 以上の自然数とする。C を半径が r の円とする。円 C に内接する正 n 角形の 1 辺の長さを s_n、円 C に外接する正 n 角形の 1 辺の長さを t_n とする。ただし、正 n 角形が円 C に外接するとは、円 C が正 n 角形のすべての辺に接することである。

(1) s_n を r と n を用いて表せ。

(2) $\dfrac{s_n}{t_n}$ を n を用いて表せ。

(3) $s_5 = 2$であるとき、円Cに内接する正5角形の面積を、小数第3位を四捨五入して小数第2位まで求めよ。ただし、$\tan 36° = 0.727$としてよい。

（大阪府立大）

34. △ABCの3辺の長さを$a = BC$, $b = CA$, $c = AB$として次の問いに答えよ。

(1) △ABCの頂点Aから直線BCに下ろした垂線の足をHとするとき、線分CHの長さをa, b, cを用いて表せ。

(2) △ABCの辺BC上にCと異なる点Dをとる。$s = BD$, $t = DC$, $\alpha = \angle BAD$, $\beta = \angle DAC$とおくとき、$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$を$b$, c, s, tを用いて表せ。

(3) △ABEの辺BCの中点をMとし、辺BC上に$\angle BAM = \angle EAC$となる点Eをとる。線分CEの長さを、a, b, cを用いて表せ。

（信州大）

35. 平面上に三角形△OA_1A_2と点A_3 , A_4 , A_5を$n = 1, 2, 3$に対して△OA_nA_{n+1}と△$OA_{n+1}A_{n+2}$が辺OA_{n+1}に関して対称になるようにとる。△OA_2A_5の面積が△OA_1A_2の面積の正の整数倍となるとき、$\angle A_1OA_2$の値を求めよ。

（京都大）

36. $AB > AC$である△ABCの頂点Aにおける外角の二等分線と対辺BCの延長との交点をDとする。$AB = c$, $BC = a$, $AC = b$として次の問いに答えよ。

(1) $BD : DC$およびCDをa, b, cで表せ。

(2) $\angle ACD = \theta$とおくとき、$\cos\theta$をa, b, cで表せ。

(3) AD^2をa, b, cで表せ。

（京都女子大）

37. △ABCにおいて、$AB = \dfrac{1}{2}$, $BC = 1$, $CA = k$とする。ただし、$\dfrac{1}{2} < k \leqq 1$である。

(1) $\cos A$をkで表すと、$\cos A =$[ア]であり、その最大値は[イ]である。

(2) $\angle B$が$60°$以上であるためのkの範囲は[ウ]$\leqq k \leqq$[エ]である。

(3) $\angle C$が最大となるのは$k =$[オ]のときである。このとき、$\angle A =$[カ]° , $\angle B =$[キ]° , $\angle C =$[ク]° である。

（京都産業大）

38. 円に内接する四角形$ABCD$において、$AB = 5$, $BC = 3$, $DA = 2$, $\angle ABC = 60°$であるとき、次の問いに答えよ。

(1) 辺CDの長さを求めよ。

(2) 四角形$ABCD$の面積を求めよ。

(3) △BCDの面積を求めよ。

(4) 対角線 BD の長さを求めよ。

（同志社大）

39. 次の[　]を数値でうめよ。ただし、[ア], [イ]の数値は整数である。
円に内接する四角形 $ABCD$ の長さが、それぞれ

$AB=\sqrt{6}$, $BC=\sqrt{7}$, $CD=\sqrt{2}$, $DA=1$ とするとする。

このとき、$AC^2=\dfrac{[\text{ ア }]+\sqrt{[\text{ イ }]}}{2}$ だから $AC=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{[\text{ ウ }]}}{2}$ となる。また、

$\angle ABC=\theta$ とおくと $\sin^2\theta=[\text{ エ }]$ だから $\sin^2\theta=\dfrac{AC^2}{[\text{ オ }]}$ となり、円の半径は［カ］

であることがわかる。また、四角形 $ABCD$ の面積は[キ]である。

（関西大）

40. 四角形 $ABCD$ は円 O に内接し、各辺の長さは $AB=1$, $BC=1$, $CD=2$, $DA=3$ である。

(1) BD の長さと $\angle BCD$ の大きさを求めよ。

(2) 四角形 $ABCD$ の面積を求めよ。

(3) 円 O の面積を求めよ。

(4) 3辺 BC, CD, DA に接する円の面積を求めよ。

（上智大）

41. $AB=AC$, $BC=1$, $\angle ABC=72°$ の三角形 ABC を考える。$\angle ABC$ の二等分線と辺 AC の交点を D とする。次の問いに答えよ。

(1) AD の長さと AC の長さを求めよ。

(2) $\cos 72°$ を求めよ。

(3) 三角形 ABD の内接円の半径を r 、三角 CBD の内接円の半径を s とするとき、$\dfrac{r}{s}$ の値を求めよ。

（大阪教育大）

42. 三角形 ABC において辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とする。この三角形 ABC は次の条件（イ）,（ロ）,（ハ）を満たすとする。

（イ） ともに2以上である自然数 p と q が存在して、$a=p+q$, $b=pq+p$, $c=pq+1$ となる。

（ロ） 自然数 n が存在して、a, b, c のいずれかは 2^n である。

（ハ） $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ のいずれかは $60°$ である。

このとき次の問いに答えよ。

(1) $\angle A, \angle B, \angle C$ を大きさの順に並べよ。

(2) a, b, c を求めよ。

（京都大）

43. 四角形 $ABCD$ が、半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で、辺の BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき、残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。

（東京大）

§11. 三角比

1. $5(\sqrt{3}+1)$ m

2. (1) $-\dfrac{3}{8}$ (2) $\dfrac{11}{16}$ (3) $\dfrac{23}{32}$ (4) $\dfrac{79}{128}$

$a>\dfrac{1}{2}\to 4a^2+a+\dfrac{3}{4}$

3. (1) $-\dfrac{2}{5}$ (2) $-\dfrac{5}{2}$ (3) $-\dfrac{65}{8}$

4. (1) $0\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}\to 5a^2+1$

$a<0\to 4a^2+1$

(2) $\tan x=0\,,\dfrac{1}{2}$

5. (1) $b=c$ の二等辺三角形

(2) $a=b$ の二等辺三角形または

$\angle C=90^\circ$ の直角三角形

6. (1) $\angle A=90^\circ$ の直角三角形

(2) $a=b$ の二等辺三角形

(3) $b=c$ の二等辺三角形

7. (1) $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

(2) $a=b$ の二等辺三角形

8. $\angle C=90^\circ$ の直角三角形

9. $\angle B=90^\circ$ の直角三角形

10. (1) $\sqrt{21}$ (2) $\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$ (3) $\dfrac{4\sqrt{21}}{9}$

11. 150°

12. $AB=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, BC=\sqrt{3}, CA=\sqrt{2}$

13. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

14. (1) $AD=\dfrac{x}{x^2+1}$ (2) $\dfrac{1}{2}\left(x=1\right)$

15. $3\sqrt{10}$

16. (1) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ (3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(4) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

17. [ア] 60 [イ] 45 [ウ] 2

[エ] $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ [オ] $3+\sqrt{3}$

18. 2

19. (1) 4 (2) 1

20. 6

21. (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (2) $\dfrac{\sqrt{9x^2-9x+3}}{3}$

(3) $\dfrac{1}{2}$

22. (1) $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{(a^2+1)(a^2+4)}}$ (2) $\sqrt{2}$

23. (1) $x>1$ (2) $\dfrac{x-3}{2x}$

(3) $1<x<3$

24. [ア] $60°$ [イ] $\sqrt{1-x+x^2}$

[ウ] $\dfrac{x^2\sqrt{1+-x+x^2}}{1-x+x^2}$

[エ] $\dfrac{x\sqrt{1+-x+x^2}}{1-x+x^2}$

[オ] $\dfrac{\sqrt{3}x(1-x)}{4(1-x+x^2)}$

25. 略

26. (1) 4 : 5 : 6 (2) $\dfrac{3}{4}$ (3) 24

27. (1) $\dfrac{1}{2}ml\sin\theta$ (2) $\dfrac{k^2}{8}\sin\theta$

28. (1) $\sqrt{a^2-xy}$ (2) $\dfrac{1}{2}a^2\sin 2\theta$

(3) $\dfrac{1}{2}a^2$

29. (1) $\dfrac{1}{2}\pi$ (2) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$のとき

$2\sqrt{1+r^2}$

30. (1) $\sqrt{7}$ (2) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ (3) $\dfrac{9}{8}\left(BE=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$

31. 3

32. 4（正方形）

33. (1) $2r\sin\left(\dfrac{180°}{n}\right)$ (2) $\cos\left(\dfrac{180°}{n}\right)$

(3) 約6.88

34. (1) $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$ (2) $\dfrac{bs}{ct}$

(3) $\dfrac{ab^2}{b^2+c^2}$

35. $30°, 45°, 90°, 135°, 150°$

36. (1) $BD:DC=c:b$, $CD=\dfrac{ab}{c-b}$

(2) $-\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

(3) $-\dfrac{bc(a+b-c)(a-b+c)}{(b-c)^2}$

37. ［ア］$k-\dfrac{3}{4k}$　［イ］$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　［ウ］1

［エ］ 1　［オ］$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　［カ］90°

［キ］ 60° ［ク］ 30°

39. ［ア］5　［イ］ 21 ［ウ］7

［エ］ $\dfrac{5+\sqrt{21}}{16}$　［オ］ 8　［カ］$\sqrt{2}$

［キ］ $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$

41. (1) $AD=1$, $AC=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(2) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　(3) $\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}$

43. $(AB\,,\,DA)=(4\,,14)\,,(14\,,4)$

38. (1) 3 (2) $\dfrac{21\sqrt{3}}{4}$　(3) $\dfrac{189\sqrt{3}}{76}$

(4) $\dfrac{21\sqrt{19}}{19}$

40. (1) $BD=\sqrt{7}$, $\angle BCD=120^\circ$

(2) $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$　(3) $\dfrac{7\pi}{3}$　(4) $\dfrac{\pi}{3}$

42. (1) $\angle B>\angle C>\angle A$

(2) $(a\,,b\,,c)=(5\,,8\,,7)$