

No 11－1 距離に関する問題

1. 直線 $l: y = \frac{1}{2}x + 1$ と 2 点 $A(1, 4), B(5, 6)$ がある。

(1) 直線 l に関して、点 A と対称な点 C の座標を求めよ。

(2) 直線 l 上の点 P で、 $AP + PB$ を最小にするものの座標を求めよ。

(2019 筑波大)

2. 座標平面上に 2 点 $A(4, 4), B(-4, 0)$ と放物線 $y = x^2 - 1$ 上を動く点 $P(x, y)$ とがある。このとき、次の[]をうめよ。

(1) $PA^2 - PB^2$ の最大値は[ア]であり、そのときの P の座標は P ([イ], [ウ])である。

(2) $PA + PB$ の最小値は[エ]であり、そのときの P の座標は P ([オ], [カ])および P ([キ], [ク])である。

(2006 関西大)

3. 座標平面上の 3 点 $A(3, 0), B(0, 6), C(4, 3)$ について、次の問に答えよ。

(1) 直線 AB と点 C との距離を求めよ。

(2) (1)で求めた直線 AB と点 C との距離を使って $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(3) $\triangle ABC$ の外接円の方程式と外心の座標を求めよ。

(2002 名城大)

4. (1) 三角形 ABC の辺 BC の中点を M とする。

このとき等式 $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$ が成り立つことを示せ。

(2) 四角形 $ABCD$ の対角線 AC, BD の中点をそれぞれ M, N とする。

このとき等式 $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$ が成り立つことを(1)の結果を利用して示せ。

(2003 新潟大)

5. 2 次関数 $y = -x^2 + 6x - 5$ ($1 \leq x \leq 4$) のグラフにおいて、 $x = 1, x = 4$ のときの 2 つの端点をそれぞれ A, B とし、点 C をこの曲線上の動点とする。

(1) この 2 次関数のグラフをかけ。

(2) 以下のそれぞれの条件を満たす点 C をこの曲線上の動点とする。

(ア) $\triangle ABC$ の面積が 3 である。

(イ) $\triangle ABC$ の面積が最大である。

(ウ) $\triangle ABC$ が $AC = BC$ となる二等辺三角形である。

(2008 愛媛大)

6. $0 < a < 1$ のとき、座標平面上に 3 点 $A(0, 1)$, $B(-1, 0)$, $Q(0, a)$ をとり、第 1 象限の点 $P(p_1, p_2)$ を考える。次の問に答えよ。

(1) 点 P を直線 BQ 上に $QP = \sqrt{2}$ となるようにとる。 p_1, p_2 を a を用いて表せ。

(2) さらに $AP = \sqrt{2}$ のとき、 a の値を求めよ。

(3) (2) のとき、 $\angle ABQ$ を求めよ。

(2018 大阪教育大)

7. 座標平面上の原点を O とする。点 $A(a, 0)$, $B(0, b)$ および点 C が $OC = 1$, $AB = BC = CA$ を満たしながら動く。

(1) $s = a^2 + b^2$, $t = ab$ とする。 s と t の関係を表す等式を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の面積のとりうる値の範囲を求めよ。

(2015 一橋大)

8. 座標平面上で、原点 O と点 $A(1, 3)$ を結ぶ線分 OA を考える。与えられた点 P に対し、 P と線分 OA の距離を $d(P)$ とおく。すなわち $d(P)$ は、点 Q が線分 OA 上を動くときの線分 PQ の最小値である。次の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標が $(5, 2)$ のとき、 $d(P)$ の値を求めよ。

(2) 点 P の座標が (a, b) のとき、 $d(P)$ を a, b の式で表せ。

(3) 放物線 $y = x^2$ 上にあり、 $d(P) = \sqrt{10}$ を満たす点 P の x 座標をすべて求めよ。

(2023 大阪公立大)

解答

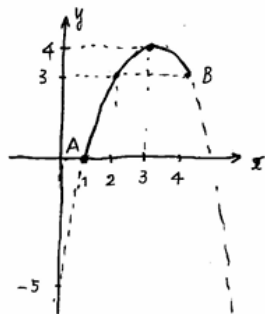
1. (1) $(3, 0)$ (2) $(4, 3)$

2. ア 32 イ -1 ウ 0 エ $4\sqrt{5}$ オ 2 カ 3 キ $-\frac{3}{2}$ ク $\frac{5}{4}$

3. (1) $\sqrt{5}$ (2) $\frac{15}{2}$ (3) 外接円: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$ 外心: $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

4. (1) 中線 (パップスの) 定理 (2) 略

5. (1) (2) ア $(2, 3)$ または $(3, 4)$



イ $\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right)$

ウ $\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

6. (1) $p_1 = \sqrt{\frac{2}{1+a^2}}, p_2 = a\left(1 + \sqrt{\frac{2}{1+a^2}}\right)$ (2) $a = 2 - \sqrt{3}$ (3) 30°

7. (1) $s \pm \sqrt{3}t = 1$ (2) $\frac{2\sqrt{3}-3}{3} \leq S \leq \frac{2\sqrt{3}+3}{3}$

8. (1) $d(P) = \sqrt{17}$ (2) $a + 3b > 10$ のとき $d(P) = \sqrt{(a-1)^2 + (b-3)^2}$

$0 \leq a + 3b < 10$ のとき $d(P) = \frac{\sqrt{10}}{10} |3a - b|$, $a + 3b < 0$ のとき $d(P) = \sqrt{a^2 + b^2}$

(3) $-2, 1 + \sqrt{2}$