

No 11-2 点と直線の距離

1. 2点 $A(-1, 1)$, $B(3, 5)$ を結ぶ線分 AB を $3:1$ に内分する点 P の座標は $([ア], [イ])$ であり、中点 M の座標は $([ウ], [エ])$ である。また点 M を通り、線分 AB に垂直な直線の方程式は $y = [オ]$ である。

(2006 大阪工大)

2. 平面上に直線 $l: ax + by + c = 0$ と直線 l 上にない点 $A(x_0, y_0)$ がある。このとき、点 $A(x_0, y_0)$ を通り直線 l に垂直な直線 m の方程式は $b(x - x_0) = [ア](y - y_0)$ とかける。これを用いて直線 l と直線 m の交点 $P(X, Y)$ の座標を求め、 $X - x_0$ および $Y - y_0$ を a, b, c, x_0, y_0 の式 $X - x_0 = [イ]$, $Y - y_0 = [ウ]$ として表し、点 A と点 P の間の距離を求めると $[エ]$ が得られる。

(2001 摂南大)

3. 3点 $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(2, 2)$ を頂点とする三角形 OAB の面積を直線 $y = mx + m + 1$ が2等分するとき、定数 m の値を求めよ。

(2006 早稲田大)

4. 直線 $y = x + 2$ に関して、直線 $y = 3x + 1$ と対称な直線の方程式を求めよ。

(2006 愛知工大)

5. 連立方程式 $(x + 2y - 6)(x - 3y - 1) = 0$, $(ax - y - 9)\left(\frac{x}{a} - y + b\right) = 0$ を同時に満足する (x, y) を座標にもつ点が、平行四辺形の4頂点になっている。

(1) 平行四辺形の対角線の交点の座標を求めよ。

(2) a と b の値を求めよ。

(1993 中央大)

6. O を原点とする xy 平面上で点 $A(a, 0)$, $B(0, b)$ をとる。ただし $a > 0$, $b > 0$ とする。線分 AB 上に2点 P, Q を直線 OP , 直線 OQ が $\angle AOB$ を3等分するようにとる。ただし、 $\angle AOB < \angle AOQ$ とする。

(1) 点 P, Q の座標を a, b で表せ。

(2) $\triangle POQ$ の面積を a, b で表せ。

(3) $\triangle POQ$ の面積は、 $\triangle AOB$ の面積の $\frac{1}{3}$ 倍より小さいことを示せ。

(2008 関西大)

7. 座標平面上に点 $A(3, 0)$, $B(0, 2)$ をとる。線分 AB 上に点 P をとり、 P から x 軸に下ろした垂線を PH , A と H の中点を M とする。ただし点 H は x 軸上の点とし、また P は A と異なるものとする。 O を原点とし $\triangle OPM$ を O を中心に座標平面内で 1 回転するとき、通過する点全体が作る円の面積が最小となるときの点 P の座標を求めよ。

(2009 千葉大)

8. 点 $A(3, -1)$ と x 軸に関して対称な点を B とし、点 B と直線 $y = x$ に関して対称な点 C の座標は $([ア], [イ])$ である。また、点 A と点 C が直線 $y = mx + n$ に関して対称であるとき、 $m = [ウ]$, $n = [エ]$ である。

(1991 福岡工大)

9. 座標平面上に 1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。ただし、 $\triangle ABC$ の重心は原点の位置にあり、辺 BC は x 軸と平行である。また、頂点 A は y 軸上にあつて y 座標は正であり、頂点 C の x 座標は正である。直線 $y = x$ に関して 3 点 A, B, C と対称な点を、それぞれ A', B', C' とする。

(1) C' の座標を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ が重なる部分の面積を求めよ。

(2006 一橋大)

10. 次の $[]$ に適する数を、解答用紙の同じ記号のついた $[]$ の中に記入せよ。

xy 平面に 3 点 $O(0, 0)$, $A(14, 0)$, $B(5, 12)$ がある。線分 OB の垂直二等分線の方程式は $y = [ア]x + [イ]$ であるから、 $\triangle OAB$ の外心 M の座標は $(7, [ウ])$ である。次に、 $\angle AOB = 2\alpha$ とおくと、 $\tan 2\alpha = [エ]$ であるから、 $\angle AOB$ の二等分線の傾きは $\tan \alpha = [オ]$ である。同様に、 $\angle OAB = 2\beta$ とおくと $\tan \beta = [カ]$ であるから、 $\angle OAB$ の二等分線の方程式は $y = [キ]x + [ク]$ となる。したがって、 $\triangle OAB$ の内心 N の座標は $([ケ], [コ])$ である。

(2009 同志社大)

11. 曲線 $y = x^2 - 1$ 上を動く点 P と、直線 $y = x - 3$ 上を動く点 Q との距離が最小となるときの点 Q の座標と、このときの距離を求めよ。

(2112 福岡大)

解答

1. ア 2 イ 4 ウ 1 エ 3 オ $-x+4$

2. ア a イ $-\frac{a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}$ ウ $-\frac{b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}$ エ $\frac{|ax_0+by_0+c|}{a^2+b^2}$

3. $m = \frac{3-2\sqrt{5}}{11}$

4. $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

5. (1) $(4, 1)$ (2) $(a, b) = (1, 3), (-1, 9)$

6. (1) $P = \left(\frac{\sqrt{3}ab}{a+\sqrt{3}b}, \frac{ab}{a+\sqrt{3}b} \right), Q = \left(\frac{ab}{\sqrt{3}a+b}, \frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3}a+b} \right)$ (2) $\frac{a^2b^2}{(a+\sqrt{3}b)(\sqrt{3}a+b)}$ (3) 略

7. $\left(\frac{21}{43}, \frac{72}{43} \right)$

8. ア 1 イ 3 ウ $\frac{1}{2}$ エ 0

9. (1) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right)$ (2) $3 - \sqrt{3}$

10. ア $-\frac{5}{12}$ イ $\frac{169}{24}$ ウ $\frac{33}{8}$ エ $\frac{12}{5}$ オ $\frac{2}{3}$ カ $\frac{1}{2}$ キ $-\frac{1}{2}$ ク 7 ケ 6 コ 4

11. $Q\left(\frac{11}{8}, -\frac{13}{8}\right) \frac{7\sqrt{2}}{8}$