

No 11-4 円と直線

1. 点 $(3, 1)$ から円 $x^2 + y^2 = 5$ に2本の接線を引き、その2つの接点をそれぞれA, Bとする。このとき、2点A, Bを通る直線の方程式は $y = [\text{ア}]$ である。

(2009 慶応大)

2. 点 $(4, 2)$ を通り、円 $x^2 + y^2 = 4$ に接する2本の直線の接点をP, Qとすると、直線PQの方程式を求めよ。

(2008 駒澤大)

3. 原点を中心とし、半径1の円をCとする。第2象限で円Cに接し、傾きが $\frac{\sqrt{5}}{2}$ の直線を l とする。第1象限にあって、Cと l と x 軸に接する円の半径を求めよ。

(1993 東京学芸大)

4. 点 $(7, 1)$ を通り、円 $x^2 + y^2 = 25$ に接する直線の方程式は、 $[\text{ア}]x + [\text{イ}]y = 25$,
 $[\text{ウ}]x - [\text{エ}]y = 25$ となり、接点の座標は x 座標の小さい方からそれぞれ $[\text{オ}], [\text{カ}]$ である。またこの2つの接点と点 $(7, 1)$ を通る円の方程式は $(x - [\text{キ}])^2 + (y - [\text{ク}])^2 = [\text{ケ}]$ である。

(2010 立命館大)

5. 直線 $y = 2x + k$ と円 $x^2 + y^2 = 2$ は異なる2点A, Bを共有している。

(1) 定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) $\triangle OAB$ の面積の最大値を求めよ。また、そのときの k の値を求めよ。ただし、Oは原点とする。

(2000 北海学園大)

6. xy 平面内に円 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ と直線 $y = mx$ ($m > 1$)がある。円の中心をCとし、円とこの直線の交点を原点から近い順にA, Bとする。 $\triangle ABC$ の面積を S とする。

(1) S の最大値とそのときの $\angle ACB$ の大きさを求めよ。

(2) $m > 1$ の場合に、線分ABの長さを m を用いて表せ。

(3) S が最大値をとるときの m の値を求めよ。

(2006 同志社大)

7. 円C: $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ の周上の点と直線 $l: y = \sqrt{3}x - 5 + \sqrt{3}$ との距離の最大値は $[\text{ア}]$ であり、最小値は $[\text{イ}]$ である。

(2015 名城大)

8. 座標平面において、点 $P(0,1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。 a を $0 < a < 1$ を満たす実数とし、直線 $y = a(x+1)$ と C との交点を Q, R とする。

(1) $\triangle PQR$ の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき、 $S(a)$ が最大となる a を求めよ。

(2011 東京大)

9. r を正の数とする。円 $x^2 + y^2 = r^2$ と直線 $y = m(x-4) + 3$ が共有点をもつ m の範囲が $0 \leq m \leq [\text{ア}]$ のとき、 $r = [\text{イ}]$ である。

(2006 大阪工大)

10. $a > b > 0$ とする。円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上の点 $(b, \sqrt{a^2 - b^2})$ における接線と x 軸との交点を P とする。また、円の外部の点 (b, c) からこの円に 2 本の接線を引き、接点を Q, R とする。このとき、2 点 Q, R を通る直線は P を通ることを示せ。

(2000 大阪大)

11. 座標平面において、原点 O を中心とする半径 1 の円を C とし、点 $P(p, q)$ は $p^2 + q^2 > 1$ を満たすものとする。 P から C へ接線を引き、その接点を $T(s, t)$ とする。 P を中心とし T を通る円を D として、 D は点 $A(a, 0)$ を通るものとする。次の問に答えよ。

(1) $(a-p)^2 = p^2 - 1$ であることを示せ。

(2) $0 < a < 1$ のとき $p > 1$ であることを示し、 a を p を用いて表せ。

(2011 大阪市立大)

12. 直線 $l: y = ax - 3a + 4$ と円 $C: x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ を考える。

(1) 直線 l は a の値に関係なく定点 P を通る。この点 P の座標を求めよ、

(2) 直線 l と円 C の共有点の個数を求めよ。

(3) 円 C が直線 l と 2 点で交わり、円 C によって切り取られてできる線分の長さが 1 であるとき、 a の値を求めよ。

(2010 愛知教育大)

13. xy 平面内で、方程式 $x^2 + y^2 - 2mx + 2my + 3m^2 - 2m - 5 = 0$ … ①が円を表すような実数 m の値の範囲は $[\text{ア}] < m < [\text{イ}]$ である。方程式①が円を表すとき、その円を C とする。円 C と直線 $y = 2x - 1$ が共有点を持つような m の値の範囲は $[\text{ウ}] \leq m \leq [\text{エ}]$ である。さらに、 $m = [\text{オ}]$ のとき、円 C の中心と直線 $y = 2x - 1$ との距離は $[\text{カ}]$ である。

(2011 関西学院大)

解答

1. $y = -3x + 5$

2. $y = -2x + 2$

3. $\frac{4+2\sqrt{3}}{5}$

4. ア 3 イ 4 ウ 4 エ 3 オ (3, 4) カ (4, -3) キ $\frac{7}{2}$ ク $\frac{1}{2}$ ケ $\frac{25}{2}$

5. (1) $-\sqrt{10} < k < \sqrt{10}$ (2) 最大値 1, $k = \pm\sqrt{5}$

6. (1) 最大値 $\frac{1}{2}$, $\angle ACB = 90^\circ$ (2) $2\sqrt{\frac{2m}{m^2+1}}$ (3) $2 + \sqrt{3}$

7. ア 7 イ 1

8. (1) $\frac{\sqrt{2a(1-a)}}{a^2+1}$ (2) $2 - \sqrt{3}$

9. ア $\frac{24}{7}$ イ 3

10. 略

11. (1) 略 (2) $a = p - \sqrt{p^2 - 1}$

12. (1) (3, 4) (2) $\frac{6-\sqrt{22}}{2} < a < \frac{6+\sqrt{22}}{2}$ で 2 個, $a = \frac{6\pm\sqrt{22}}{2}$ で 1 個, それ以外で 0 個 (3) $\frac{8\pm\sqrt{35}}{3}$

13. ア $1 - \sqrt{6}$ イ $1 + \sqrt{6}$ ウ $-\frac{6}{7}$ エ 2 オ $\sqrt{5}$