

No 11-5 軌跡

1. 点 $A(-2, 0)$ と $B(6, 0)$ からの距離の比が $3:1$ となるような点 P の軌跡を求めよ。

(龍谷大)

2. 点 $(1, 2)$ に関し、曲線 $y = 2x^2 - 3x + 4$ と点対称の位置にある図形の方程式を求めよ。

(2004 武蔵工大)

3. 実数 t を媒介変数として、 $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{4t}{1+t^2}$ で表される点 (x, y) が満たす曲線の方程式を x, y で表すと [] である。ただし、 $(x, y) \neq (-1, 0)$ である。

(2008 関西大)

4. 点 (a, b) より放物線 $y = x^2$ に引いた 2 つの接線が互いに直交している。このとき、 $b = [\quad]$ である。

(2016 関西大)

5. 円 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$ と 2 点 $A(5, 1)$, $B(3, 4)$ がある。点 P が円 C 上を動くとき、 $\triangle ABP$ の重心 G の軌跡を求めよ。

(2000 東洋大)

6. xy 平面上の 2 直線 $tx - y = t$, $x + ty = -2t - 1$ の交点 P の y 座標は [ア] である。 t が任意の実数値をとって変わるとき P が描く図形は、方程式 [イ] で表される曲線から点 [ウ] を除いたものである。 P の x 座標の最大値は [エ] である。

(2008 関西学院大)

7. 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = m(x+2)$ が異なる 2 点 A, B で交わっている。

(1) 定数 m の値の範囲を求めよ。

(2) m の値が変化するとき、線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

(2001 東北福祉大)

8. 点 $(5, 0)$ を通り、傾きが a の直線が円 $x^2 + y^2 = 9$ と異なる 2 点 P, Q で交わるとき、次の問に答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) P と Q の中点を M とする。 a を動かすとき、点 M の軌跡を求めよ。

(2009 群馬大)

9. k を区間 $0 \leq k < 1$ に含まれる実数とすると、方程式 $(k-1)x^2 - kx + y = 0$ で与えられる曲線 C_k は、すべて 2 点 $A(0, 0)$ および $B(1, 1)$ を通る放物線である。

(1) A, B 以外の任意の点を P とするとき、これらの放物線 C_k のうち、 P を通るものはただか 1 つしかないことを証明せよ。

(2) k が上記の区間を動くとき、これらの放物線 C_k の頂点はいかなる曲線を描くか。

(1993 九州大)

10. xy 平面上の 2 点 $A(-1, 4), B(2, 5)$ を通り、直線 $y = \frac{1}{2}x$ と共有点をもつ円を考える。以下の問に答えよ。

(1) この円の中心 P の軌跡を求めよ。

(2) この円の半径 r の最小値を求めよ。

(2010 早稲田大)

11. 3 次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3ax$ (a は実数) は極大値と極小値をもち、 $y = f(x)$ のグラフ上で、極大となる点を A , 極小となる点を B とする。

(1) 線分 AB の中点 $M(p, q)$ の座標を a で表せ。

(2) a が変化するとき、中点 $M(p, q)$ の軌跡を求め、そのグラフをかけ。

(1990 熊本女子大)

12. 座標平面上の 1 点 $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ をとる。放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $Q(\alpha, \alpha^2), R(\beta, \beta^2)$ を 3 点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき、 $\triangle PQR$ の重心 $G(X, Y)$ の軌跡を求めよ。

(2011 東京大)

13. 放物線 $y = x^2$ と、点 (a, b) を頂点とする放物線 $y = -(x-a)^2 + b$ とが交わり、それらで囲まれる部分の面積が常に $\frac{8}{3}$ であるとき、点 (a, b) の軌跡を求めよ。

(1991 学習院大)

14. xy 平面の原点を O とする。 xy 平面上の O と異なる点 P に対し、直線 OP 上の点 Q を次の条件 (a), (b) を満たすようにとる。

(a) $OP \cdot OQ = 4$

(b) Q は、 O に関して P と同じ側にある。

このとき、次の問に答えよ。

(1) 点 P が直線 $x = 1$ の上を動くとき、点 Q の軌跡を求めて、図示せよ。

(2) $a > r > 0$ とする。点 P が円 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ の上を動くとき、点 Q の軌跡が円であることを示し、その中心の座標と半径を求めよ。

(2009 大阪市大)

解答

1. $(x-7)^2 + y^2 = 9$

2. $y = -2x^2 + 5x - 2$

3. $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

4. $-\frac{1}{4}$

5. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{9}$

6. ア $\frac{2t(t+1)}{t^2+1}$ イ $x^2 + (y+1)^2 = 2$ ウ $(1, -2)$ エ $\sqrt{2}$

7. (1) $m < -8, 0 < m$ (2) $y = 2x^2 + 4x$ の $x < -4, 0 < x$ の部分

8. (1) $-\frac{3}{4} < a < \frac{3}{4}$ (2) $x^2 - 5x + y^2 = 0$ の $0 \leq x \leq \frac{9}{5}$ の部分

9. (1) 略 (2) $y = \frac{x^2}{2x-1} \ (x \leq 0)$

10. (1) $y = -3x + 6$ 上の $x \leq -1$ または $1 \leq x$ の部分 (2) $\sqrt{5}$

11. (1) $(-a, 2a^3 - 3a^2)$ ($p < -1, 0 < p, a < 0, 1 < a$) (2)

12. $y = \frac{\frac{1}{9}}{x - \frac{1}{6}} - \frac{1}{12}$ の $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$ の部分

13. $b = \frac{1}{2}a^2 + 2$

14. (1) $(x-2)^2 + y^2 = 4$ の $(0, 0)$ を除いた部分 図略

(2) 中心 $(\frac{4a}{a^2-r^2}, 0)$ 半径 $\frac{4r}{a^2-r^2}$

