

§ 12-3 最大・最小

1. 区間 $0 \leq x \leq 1$ において、関数 $f(x) = 3x^3 - k^2x + 2$ の最大値と最小値を求めよ。ただし、 $k > 0$ とする。
(1993 岩手大)

2. xy 平面上で、曲線 $y = x^2 - 4$ と x 軸とで囲まれた図形（境界を含む）に含まれる最長の線分の長さを求めよ。
(1985 名古屋大)

3. t を正の実数とする。 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3(t^2 - 1)x + 2t^3 - 3t^2 + 1$ とおく。以下の問に答えよ。

(1) $2t^3 - 3t^2 + 1$ を因数分解せよ。

(2) $f(x)$ が極小値 0 をもつことを示せ。

(3) $-1 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を t の式で表せ。

(2017 神戸大)

4. $a > 0$ となる定数 a に対して、関数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x - \frac{2}{3}a^3$ を考える。

(1) $y = |f(x)|$ のグラフの概形をかけ。

(2) $-1 \leq x \leq 1$ における関数 $|f(x)|$ の最大値を求めよ。

(2013 弘前大)

5. a を正の数とする。 xy 平面上の曲線 $C_1: y = x^2$ 上のすべての点を点 $(a, \frac{2}{3}a^2 + 1)$ に関して対称移動して得られる曲線を C_2 とする。

(1) C_2 の方程式を求めよ。

(2) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるような a の範囲を求めよ。

(3) a が (2) の範囲を動くとき、 C_1 と C_2 の 2 交点 P, Q および点 $R(0, 2)$ を頂点とする三角形の面積を最大にする a の値を求めよ。

(2007 横浜国大)

6. 3 次関数 $y = x^3 - 2ax^2 + a^2x$ ($a > 0$) の $0 \leq x \leq 1$ における最大値を求めたい。まず y は $x = [\text{ア}]$ のとき極大値 $[\text{イ}]$ をとり、 $x = [\text{ウ}]$ のとき極小値 $[\text{エ}]$ をとり、更に $[\text{ア}]$ 以外に $y = [\text{イ}]$ となるような x 値は $x = [\text{オ}]$ である。

そこで、求める最大値を a の関数と考えて $M(a)$ で表すと次のようになる。

$a \geq [\text{カ}]$ のとき、 $M(a) = [\text{キ}]$

[カ] $> a \geq$ [ク] のとき、 $M(a) =$ [ケ]

[ク] $> a > 0$ のとき、 $M(a) =$ [コ]

(2000 立命館大)

7. 正の実数 a, x に対して、 $y = \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^3 + a(\log_{\sqrt{2}} x)(\log_4 x^3)$ とする。

(1) $t = \log_2 x$ とするとき、 y を a, t を用いて表せ。

(2) x が $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$ の範囲を動くとき、 y の最大値 M を a を用いて表せ。

(2023 大阪大)

8. 次の(条件)を満たす実数 a をすべて求めよ。

(条件) 実数全体で定義された関数 $3x^4 - 4(a-1)x^3 - 6ax^2$ が最小値をとる x の値がちょうど2つ存在する。

(2021 学習院大)

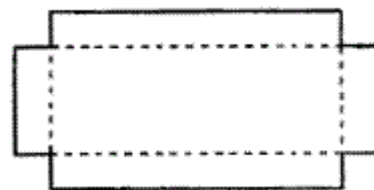
9. $f(\theta) = \cos 4\theta - 4\sin^2 \theta$ とする。 $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ。

(2004 京都大)

10. 一辺の長さが x の正方形を底面とする直方体を作る。ただし、底面以外の5つの面の面積の和が48になるようにする。この直方体の体積 V は x を用いて、 $V =$ [ア] と表せる。 $\frac{dV}{dx} =$ [イ] より、 V の最大値は [ウ] である。

(2011 同志社大)

11. 2辺が10cm、20cmの長方形の薄い金属板の四隅から合同な正方形を切り取り、その残りの部分(右図)を点線に沿って折り曲げて、ふたのない箱をつくる。こうして作られる箱の容積の最大値を求めよ。



(2004 愛媛大)

§12-3 最大・最小

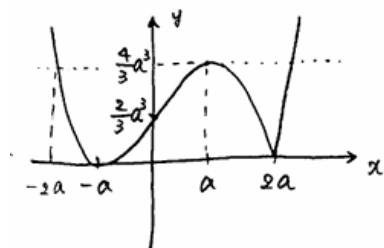
1. $k > 3$ のとき、最大値 2, 最小値 $5 - k^2$ $\sqrt{3} < k \leq 3$ のとき、最大値 2, 最小値 $-\frac{2}{9}k^2 + 2$
 $0 < k \leq \sqrt{3}$ のとき、最大値 $5 - k^2$, 最小値 $-\frac{2}{9}k^2 + 2$

2. $\frac{\sqrt{71+8\sqrt{2}}}{2}$

3. (1) $(t-1)^2(2t+1)$ (2) 略 (3) $t \geq 3$ のとき、最大値 $2t^3$, 最小値 $2t^3 - 9t^2 + 27$

$\sqrt{3} \leq t < 3$ のとき、最大値 $2t^3$, 最小値 0 $0 < t < \sqrt{3}$ のとき、最大値 $2t^3 - 9t^2 + 27$, 最小値 0

4. (1)



- (2) $a \geq 1$ のとき、 $\frac{1}{3}(a+1)^2(2a-1)$

$\frac{1}{2} < a < 1$ のとき、 $\frac{4}{3}a^3$

$0 < a \leq \frac{1}{2}$ のとき、 $\frac{1}{3}(a-1)^2(2a+1)$

5. (1) $y = -(x-2a)^2 + \frac{4}{3}a^2 + 2$ (2) $0 < a < \sqrt{3}$ (3) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

6. ア $\frac{a}{3}$ イ $\frac{4}{27}a^3$ ウ a エ 0 オ $\frac{4}{3}a$ カ 3 キ $1-2a+a^2$ ク $\frac{3}{4}$ ケ $\frac{4}{27}a^3$ コ $\frac{1-2a+a^2}{2}$

7. (1) $-t^3 + 2at^2 - \frac{4}{27}a^3$ (2) $a > \frac{3}{2}$ のとき、 $27a-27$, $1 < a \leq \frac{3}{2}$ のとき、 $4a^3$, $a=1$ のとき、4
 $0 < a < 1$ のとき、 $3a+1$

8. $a = -2, -\frac{1}{2}, 1$

9. 最大値 1, 最小値 $-\frac{7}{2}$

10. ア $\frac{1}{4}(-x^3 + 48x)$ イ $-\frac{3}{4}(x+4)(x-4)$ ウ 32

11. $\frac{100\sqrt{3}}{9}$