

§ 1 2-4 不等式の証明

1. x, y を正の実数, n を正の整数とすると、不等式 $x^n + (n-1)y^n \geq nxy^{n-1}$ を証明せよ。

(1992 学習院)

2. 関数 $f(x) = \frac{1+x^n}{2} - \left(\frac{1+x}{2}\right)^n$ について、次の問いに答えよ。ただし、 n は 2 以上の整数とする。

(1) $f(x)$ の $x \geq 0$ における最小値を求めよ。

(2) a, b をそれぞれ正の整数とすると、 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$ と $\frac{a^n+b^n}{2}$ の大小関係を定めよ。

(2007 公立はこだて未来大)

3. x の 3 次関数 $f(x)$ を $f(x) = 2x^3 - 3(a+2)x^2 + 12ax + a$ によって定める。

(1) $a = 1$ とするとき、 $f(x)$ の極値を求め、 $y = f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $x \geq 0$ の範囲で $f(x) \geq 0$ となるような a の値の範囲を求めよ。

(2004 東京海洋大)

4. a を実数とし、関数 $f(x) = x^3 - 3ax + a$ を考える。 $0 \leq x \leq 1$ において $f(x) \geq 0$ となるような a の範囲を求めよ。

(2006 大阪大)

5. 不等式 $3x^4 - 4ax^3 - 6x^2 + 12ax + 7 \geq 0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ。

(1990 香川大)

6. a を定数とし、2 つの関数 $f(x) = -x^3 - x^2 + 2x$ と $g(x) = x^2 - 2x + a$ を考える。

(1) $g(x)$ の最小値を a を用いて表せ。

(2) $x \geq 0$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x) \leq g(x)$ が成り立つとき、 a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0$ を満たすすべての実数 b_1, b_2 に対して $f(b_1) \leq g(b_2)$ が成り立つとき、 a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2019 北里大)

7. (1) $x \geq 0$ ならば常に $4x^3 + 1 \geq kx$ となるような定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) $x \geq 0, y \geq 0$ のとき、 $\frac{4(x^3+y^3)+5}{x+y+1}$ の最小値とそのときの x, y の値を求めよ。

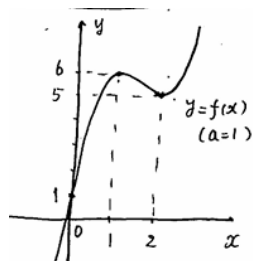
(2006 一橋大)

§12-4 不等式の証明

1. 両辺を y^n で割り、 $\frac{x}{y}$ を t とおき、 $t^n + (n-1) \geq nt$ を証明する。

2. (1) 0 (2) $a = b$ のとき、 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n = \frac{a^n + b^n}{2}$, $a \neq b$ のとき、 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < \frac{a^n + b^n}{2}$

3. (1) (2) $\frac{8}{13} \leq a \leq 3 + \sqrt{10}$



4. $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$

5. $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$

6. (1) $a-1$ (2) $a \geq \frac{40}{27}$ (3) $a \geq \frac{7+14\sqrt{7}}{27}$

7. (1) $k \geq 3$ (2) 最小値 3, $x = y = \frac{1}{2}$