

§ 1 2-6 接線

1. 曲線 $y = x^3 + 4kx + 1$ 上の x 座標が 2 である点における接線が点 $(1, -1)$ を通るとき、定数 k の値を求めよ。

(2006 福井工大)

2. 曲線 $y = |x|(1 - |x|)$ 上の点 $(\frac{2}{3}, \frac{2}{9})$ における接線と、同じ曲線上の点 $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{9})$ における接線との交点の y 座標の値は [] である。

(2007 関西大)

3. a を実数とし、 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 2x + 1$ とする。次の問いに答えよ。

(1) xy 平面において曲線 $y = f(x)$ の接線で傾きが m であるものが 2 本引けるとき、 m の値の範囲を求めよ。

(2) m が (1) で求めた範囲にあるとき、曲線 $y = f(x)$ の傾きが m である 2 本の接線の接点をそれぞれ P, Q とする。線分 PQ の中点 R の x 座標、 y 座標を求めよ。

(2011 関西学院大)

4. 曲線 $y = x^3 - 2x - 5$ を C とする。点 $(3, 0)$ から曲線 C へは複数の接線が引けるが、それらのうち傾きの値が最も小さい接線を ℓ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) 曲線と接線 ℓ が、接点以外に共有する点の座標を求めよ。

(2006 岩手大)

5. 放物線 $y = ax^2 - 2x + 1$ について、次の問いに答えよ。ただし、 a は 0 でない定数とする。

(1) 原点から放物線 $y = ax^2 - 2x + 1$ に引いた接線が 2 本あるような a の条件を求めよ。また、これらの接線の方程式を求めよ。

(2) (1) で得られた 2 接線のなす角が 45° となるような a の値を求めよ。

(2006 千葉大)

6. a, b を正の実数とする。曲線 $C: y = x^3 - a^2x + a^3$ と点 $(b, 0)$ を考える。

(1) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 3 本引けるような点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。

(2) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 2 本引けるとする。2 つの接点を A, B としたとき、 $\angle APB$ が 90° より小さくなるための a と b の条件を求めよ。

(2010 東北大)

7. a, b を実数の定数とする。2つの曲線 $C_1: y = x^3 + ax + 3$ と $C_2: y = x^2 + b$ は第1象限内の1点で接線を共有し、その接線 L は点 $(0, -a)$ を通る。このとき、 a, b の値と接線の方程式を求めよ。

(2002 早稲田大)

8. 曲線 $y = x^3$ の $x > 0$ の部分を C とする。 C 上の点 P に対し、 P における C の接線と x 軸との交点を Q とし、 P における C の法線と y 軸との交点を R とする。 P が C 上を動くとき、 $\frac{OR}{OQ}$ の最小値を求めよ。ただし、 O は原点である。

(2005 京都大)

9. C を3次曲線 $y = x^3 + 3x^2$ とする。 C 上の点 (p, q) に対し「 C 上の点 Q が存在して、 C の P における接線は C の Q における接線と直交する」となるような p の範囲を求めよ。

(1991 京都大)

10. 曲線 $C: y = x^3 - kx$ (k は実数) を考える。 C 上に点 $A(a, a^3 - ka)$ ($a \neq 0$) をとる。次の問いに答えよ。

(1) 点 A における C の接線を l_1 とする。 l_1 と C の A 以外の交点を B とする。 B の x 座標を求めよ。

(2) 点 B における C の接線を l_2 とする。 l_1 と l_2 が直交するとき、 a と k がみたす条件を求めよ。

(3) l_1 と l_2 が直交する a が存在するような k の値の範囲を求めよ。

(2009 大阪大)

11. 4次曲線 $C: y = f(x) = x^4 - 2x^2$ について考える。

C 上の点 $P(t, f(t))$ における接線が P 以外の相異なる2点で C と交わるような実数 t の範囲を求めよ。

(1993 岐阜大)

12. xy 平面上に曲線 $C: y = x^3 - 2x + 1$ と点 $A(2, -3), B(2, a)$ がある。

(1) 点 $(t, t^3 - 2t + 1)$ における C の接線が A を通るような t の値を求めよ。

(2) 点 B から曲線 C に3本の接線が引けるような a の値の範囲を求めよ。

(2006 関西学院大)

13. 点 $(0, 1)$ を通り曲線 $y = x^3 - ax^2$ に接する直線がちょうど2本存在するとき、実数 a の値および2本の接線の方程式を求めよ。

(1993 大阪大)

14. 直線 $l: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ の点 P から曲線 $y = x^2$ に引いた 2 接線の接点を Q, R とし、 $Q = \angle QPR$ とする。

(1) P の x 座標を t とし P が l 上を動くとする。 $t \neq 0$ のとき、 $\tan \theta$ を t の関数として表せ。

(2) θ の最大値を求め、このときの点 P の座標を求めよ。

(2011 群馬大)

15. a, b を正の実数とし、座標平面上の放物線 $C: y = ax^2 + b$ を考える。 t, s は正の実数とし、点 $P(t, at^2 + b)$ における C の接線を l_P 、点 $Q(s, as^2 + b)$ における C の接線を l_Q で表す。 l_P は原点を通っているとする。次の問いに答えよ。

(1) l_P の傾きが 1 未満となるための必要十分条件を、 a と b を用いて表せ。

(2) l_P の傾きは 1 未満とし、 l_P と x 軸がなす鋭角を θ と表す。 Q を l_Q と x 軸がなす鋭角が 2θ になるようにとるとき、 l_Q の傾きを a と b を用いて表せ。

(3) a, b が $a + b = \frac{1}{2}$ をみたすとき、 l_P の傾きは 1 未満であることを表せ。

(4) a, b は $a + b = \frac{1}{2}$ をみたすものとし、 Q を (2) のようにとる。 l_Q の傾きが最大になるような a, b を求めよ。

(2010 大阪市大)

解答

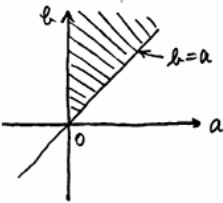
1. $k = \frac{1}{2}$

2. $\frac{4}{9}$

3. (1) $m > 2 - 3a^2$ (2) $(a, -2a^3 + 2a + 1)$

4. (1) $y = x - 3$ (2) $(2, -1)$

5. (1) $a > 0, y = 2(\pm\sqrt{a} - 1)x$ (2) $a = \frac{7 \pm 2\sqrt{6}}{4}$

6. (1)  (2) $a = b > \sqrt[4]{\frac{4}{23}}$

7. $(a, b) = (-1, 2)$ 接線: $y = 2x + 1$

8. $\sqrt{3}$

9. $p \leq \frac{-3 - \sqrt{10}}{3}, -2 < p < 0, p \geq \frac{-3 + \sqrt{10}}{3}$

10. (1) $x = -2a$ (2) $36k^4 - 15a^2k + k^2 = -1$ (3) $k \geq \frac{4}{3}$

11. $-1 < t < 1$ ただし、 $t \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

12. (1) $t = 0, 3$ (2) $-3 < a < 5$

13. $a = 3$, 接線: $y = -3x + 1, y = \frac{15}{4}x + 1$

14. (1) $\tan \theta = -\frac{\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{t}$ (2) 最大值: $\theta = \frac{2}{3}\pi$, $P = \left(1, \frac{1}{4}\right)$

15. (1) $0 < ab < \frac{1}{4}$ (2) $\frac{4\sqrt{ab}}{1 - 4ab}$ (3) 略 (4) $a = b = \frac{1}{4}$