

§ 13-2 定積分関数

1. 2次関数 $f(x)$ が、 $f(2)=26, f'(2)=18, \int_{-1}^1 f(x) dx = 6$ を満たすとき $f(x)$ を求めよ。

(2003 近畿大)

2. 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が、任意の2次関数 $g(x)$ に対して $\int_0^1 f(x)g(x)dx=0$ を満たすとき、実数 a, b, c の値を求めよ。

(関西学院大)

3. 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $f(1)=f(-1)=0$ を満たしている。ただし、 a, b, c は定数とする。 $I = \int_{-1}^1 f(x)^2 dx$ が最小となるように、 a, b, c を決定せよ。また、そのときの I の値を求めよ。

(1991 弘前大)

4. x の3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が、3つの条件 $f(1)=1, f(-1)=1, \int_{-1}^1 (bx^2+cx+d)dx=1$ をすべて満たしているとする。このような $f(x)$ の中で定積分 $I = \int_{-1}^1 \{f''(x)\}^2 dx$ を最小にするものを求め、そのときの I の値を求めよ。ただし、 $f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す。

(2011 東京大)

5. すべての x に対して、 $\int_1^x (at^2+bt)dt = cx^3+4x^2-6$ が成り立つとき、 a, b, c の値を求めよ。

(2003 千葉工大)

6. 整式 $f(x)$ と実数 C が $\int_0^x f(y)dy + \int_0^1 (x+y)^2 f(y)dy = x^2 + C$ を満たすとき、この $f(x)$ と C を求めよ。

(2009 京都大)

7. a を定数とするとき、 $f(t)=t(t-a)(t-a+3)$ が任意の x に対して $\int_{-x}^x f'(t)dt = 2f(x)$ を満たしている。このとき、 $f(x)+f(-x)=[ア]$ が任意の x に対して成り立つから、 a の値は[イ]である。

(2004 摂南大)

8. 2次関数 $f(x)$ と定数 p が $\int_0^x f(t)dt + x \int_{-1}^1 f(t)dt - \frac{1}{3}\{f(1)-f(-1)\} = 4x^3 + px^2 - 10x - 4$ を満たす。

(1) 2次関数 $f(x)$ と定数 p の値を求めよ。

(2) $g(x)=(x+1)f(x)$ とする。関数 $g(x)$ の極値とそのときの x の値を求めよ。

(同志社大)

9. 関数 $f(x)$ は $x < 0$ のとき 0 , $0 \leq x \leq 1$ のとき x , $x > 1$ のとき 1 の値をとるとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $g(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt$ を次の 4 つの場合にそれぞれ求めよ。

[1] $x \leq 0$ [2] $0 < x \leq 1$ [3] $1 < x \leq 2$ [4] $2 < x$

(3) $y = g(x)$ のグラフをかけ。

(2003 中央大)

10. 関数 $f(x)$ が等式 $f(x) = x^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 xf(t) dt + k$ を満たすとき、次の問いに答えよ。ただし、 k は定数とする。

(1) 定積分 $\int_0^1 f(t) dt$ を求めよ。

(2) 関数 $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ を求めよ。

(3) 関数 $h(x) = g(x) + \frac{1}{3}x$ が常に単調に増加するように、定数 k の値の範囲を定めよ。

(2007 宇都宮大)

11. 関数 $f(x)$ が $f(x) = x^2 - x \int_0^2 |f(t)| dt$ を満たしているとする。このとき、 $f(x)$ を求めよ。

(2007 東北大)

12. 関数 $f(x)$ が $f(x) = x^3 - 4x \int_0^1 |f(t)| dt$ を満たすとき、 $f(x)$ の極大値を求めよ。

(1991 広島大)

13. 等式 $\int_0^1 f(t) dt = x^3 - ax + \int_0^2 |t^2 - 1| dt$ を満たす関数 $f(x)$ について、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ。

(2) $g(x) = \int_x^1 f(t) dt$ とするとき、関数 $g(x)$ の極値を求めよ。

(2008 大分大)

14. x の関数 $f(x)$, $g(x)$ が次の条件①, ②を満たしている。

$$\int_1^x f(t) dt = xg(x) + ax + 2 \quad (a \text{ は実数}) \cdots \cdots \text{①}$$

$$g(x) = x^2 - 2x \int_0^1 f(t) dt + 1 \cdots \cdots \text{②}$$

このとき、定数 a の値と関数 $f(x)$, $g(x)$ を求めよ。

(2002 北海道薬大)

解答

1. $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$

2. $(a, b, c) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}, -\frac{1}{20}\right)$

3. $(a, b, c) = (0, -1, 0)$ のとき最小値 $\frac{16}{105}$

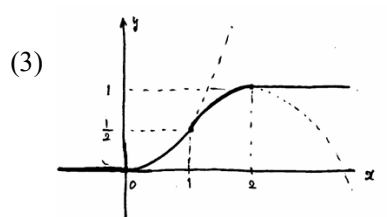
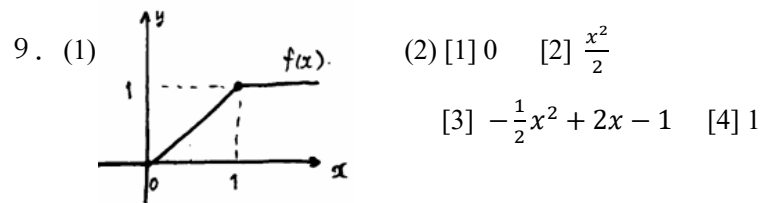
4. $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{4} \quad I = \frac{81}{32}$

5. $(a, b, c) = (6, 8, 2)$

6. $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \quad C = \frac{5}{24}$

7. $\mathcal{A} \quad 0 \quad \mathcal{I} \quad \frac{3}{2}$

8. (1) $f(x) = 12x^2 + 6x - 6 \quad , \quad p = 3 \quad$ (2) 極大値 : 0, 極小値 : -6



10. (1) $\frac{4(3k+1)}{9} \quad$ (2) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{3k+1}{9}x^2 + kx \quad$ (3) $-\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{26}{3}$

11. $x^2 - \frac{8}{3}x$ または $x^2 - x$

12. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ または $\frac{\sqrt{6}}{18}$

13. (1) $f(x) = -3x^2 + 3 \quad a = 3 \quad$ (2) 極大値 : 4 極小値 : 0

14. $a = -8 \quad f(x) = 3x^2 + 8x - 7, g(x) = x^2 + 4x + 1$