

No16 ガウス問題の解き方

「 x 以下の最大の整数」を $[x]$ と表すのは「ガウス記号」と呼ばれるもので、その簡単な問題は中学・高校入試でも出たことがあるかもしれません。

ガウス記号に関しては、 $x-1 < [x] \leq x$ あるいは $[x] \leq x < [x] + 1$ という関係 ($[x] = k$ とおくと、 $k \leq x < k+1$) が成立し、ガウス記号問題はこれらの不等式を使って解きます。方法論がはっきりしているだけ、やさしい問題ともいえます。

COMMENT

ガウス記号に対して苦手意識を持っている人は多いですが、ガウス記号にまつわる問題は丁寧に場合分け&簡単な不等式処理で解けることが多いです。

《例題》

正の実数 a に対してその整数部分を $[a]$ と表すことにする。

(1) $[x^2] = 4$ を満たす正の実数 x の範囲を答えよ。

(2) $[x] \times \left[\frac{5}{x} \right] = 3$ を満たす正の実数 x の範囲を答えよ。

(2015 東海大)

【演習】

- $[x^2] = x$ を解け。
- $\left[\frac{1}{3}x + 1 \right] = 2$ を満たす x の範囲を求めよ。
- $[2x] = 3x - 1$ を解け。
- $\left[\frac{1}{2}x + 1 \right] = [x]$ を満たす x の範囲を求めよ。

5. $[x^2] + [2x] + [x] = x + \frac{1}{2}$ を解け。

(東京理科大)

6. 実数 x に対して、 x 以下の最大の整数を $[x]$ で表す。次の等式を満たす最大の整数 a を求めよ。

$$\left[\frac{a}{2} \right] + \left[\frac{2a}{3} \right] = a$$

(早稲田大)

7. 実数 x に対して $k \leq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す。たとえば、 $[2] = 2$, $[5.2] = 2$, $[-2.1] = -3$ である。

(1) $n^2 - n - \frac{5}{4} < 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(2) $[x]^2 - [x] - \frac{5}{4} < 0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3) x は(2)で求めた範囲にあるものとする。 $x^2 - [x] - \frac{5}{4} = 0$ を満たす x をすべて求めよ。

(2011 北海道大)

8. 実数 a に対して、 a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。10000 以下の正の整数 n で $[\sqrt{n}]$ が n の約数となるものは何個あるか。

(2012 東京工業大)

9. 実数 x に対して、 x 以下の最大の整数を $[x]$ で表す。以下の問いに答えよ。

(1) $\frac{14}{3} < x < 5$ のとき、 $\left[\frac{3}{7}x \right] - \left[\frac{3}{7}[x] \right]$ を求めよ。

(2) すべての実数 x について、 $\left[\frac{1}{2}x \right] - \left[\frac{1}{2}[x] \right] = 0$ を示せ。

(3) n を正の整数とする。実数 x について、 $\left[\frac{1}{n}x \right] - \left[\frac{1}{n}[x] \right]$ を求めよ。

(2009 早稲田大)

10. 正の整数 n に対して、整数 $f(n)$ を $f(n) = \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]} \right]$ で定義する。ただし、 $[x]$ は x 以下

の最大の整数を表す。例えば $[2] = 2$, $[3.8] = 3$, $\left[\frac{7}{[\sqrt{7}]} \right] = \left[\frac{7}{2} \right] = 3$ である。このとき、

次の設問に答えよ。

(1) $f(n) = 5$ となる n の最小値と最大値を求めよ。

(2) $f(n) > f(n+1)$ を満たす 2007 以下の正の整数 n の個数を求めよ。

(2007 早稲田大)

解答

例題 (1) $2 \leq x < \sqrt{5}$ (2) $\frac{5}{4} < x \leq \frac{5}{3}, 3 \leq x < 4$

1. $x = 0, 1$

2. $3 \leq x < 6$

3. $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$

4. $1 \leq x < 3$

5. $x = -\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$

6. 7

7. (1) $n = 0, 1$ (2) $0 \leq x < 2$ (3) $x = \frac{3}{2}$

8. 298 個

9. (1) 1 (2) 0 (3) 0

10. (1) 最小値 15 最大値 29 (2) 43 個