スタンダード演習

数 と 式

1．$k=0,1,2,3$ のそれぞれの場合に、次の式を簡単にせよ。

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^k}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)}$$

（名古屋市大）

2．(1) $a+b+c=0$, $abc\neq 0$ のとき、$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ の値を求めよ。

(2) $abc=1$ のとき、$\dfrac{1}{ab+a+1}+\dfrac{1}{bc+b+1}+\dfrac{1}{ca+c+1}$ の値を求めよ。

（滋賀大・早稲田大 ， 東北工大）

3．$a+b+c+d=0$ のとき、$a^3+b^3+c^3+d^3=3(a+d)(b+d)(c+d)$ であることを証明せよ。

（関西学院大）

4．$xyz=1$, $x+\dfrac{1}{x}=a$, $y+\dfrac{1}{y}=b$, $z+\dfrac{1}{z}=c$ とする。$a^2+b^2+c^2-abc$ の値を求めよ。

（一橋大）

5．$x=\dfrac{2a}{1+a^2}$ のとき、$\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ の値を求めよ。ただし、a は 0 でない実数とする。

（東京水産大）

6．(1) $x=1-\sqrt{5}$ のとき、$x^4-5x^2-14x+3$ の値を求めよ。

(2) $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ のとき、$\dfrac{3x^3-3x+1}{x^5}$ の値を小数第 2 位まで正しく求めよ。

（浜松医科大 ， 帯広畜産大）

7．(1) $x=1-2i$ のとき、$x^4-4x^3+14x^2-19x+26$ の値を求めよ。

(2) $x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき、x^4-3x^2+6x-2 の値を求めよ。

（福岡教育大 ， 鳥取大）

８．$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=1$ のとき、α^3,α^6 の値はそれぞれ［　　］だから、n が整数のとき、$\alpha^n+\dfrac{1}{\alpha^n}$ の相異なる値は［　　］通りに限り、その値は［　　］である。

（横浜市大）

９．$f(x)=2x^5+2x^4+x^3+1$ であるとき、

(1) $f(w)$の値を求めよ。（w は 1 の虚数立方根の 1 つとする。）

(2) $f(x)$を実数係数の範囲内で因数分解せよ。

（東京水産大）

10. $x^5=1$ のとき、$2x+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{1+x^3}+\dfrac{x^3}{1+x^4}$ の値を求めよ。

（早稲田大）

11. $x^3+x-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$であるとき、次の各問いに答えよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ の値を求めよ。

(2) α^7 を α の 2 次式で表せ。

(3) $\alpha^7+\beta^7+\gamma^7$ の値を求めよ。

（東京電機大）

12. (1) $6x^5+7x^4-10x^3+mx^2+11x+n$ が $3x^3-x^2+px+3$ で割り切れるような整数 m, n, p の値を求めよ。

(2) 整式 $P(x)$を $x+1, x+2, x+3$ で割ったときの剰余がそれぞれ 2 , 3 , 6 である。$P(x)$を$(x+1)(x+2)(x+3)$で割ったときの剰余を求めよ。

（立命館大・宇都宮大）

13. x の 3 次式 $f(x)$がある。$f(x)+1$ は$(x+1)^2$ で割り切れる。また、$3-f(x)$は $x+2$ で割り切れて、その商は x の 1 次式の平方であるという。$f(x)$を求めよ。

（埼玉大）

14. x の整式 $f(x)$を $x-1$ で割ったときの余りは 4、x^2-4x+5 で割ったときの余りは $px+q$ で、$(x-1)(x^2-4x+5)$で割ったときの余りは$(x-r)^2$ である。

(1) $f(1)$の値を求めよ。

(2) 定数 p, q, r の値を求めよ。

（山梨大）

15. x^2+1 で割れば $x+1$ 余り、x^2+x+2 で割れば $3x+5$ 余るような多項式のうちで、最も次数の低いものを求めよ。

（同志社大）

16. 次の恒等式が成り立つように数係数 a , b および整式 $P(x)$を求めよ。ただし、n は 2 以上の自然数とする。

$$x^n + ax + b = (x - 1)^2 P(x)$$

（関西大）

17. $x^{(n)} = x(x - 1)(x - 2)\cdots(x - n)$（ただし、$n$ は自然数）と定義するとき、$x^5 = a_0 + a_1 x^{(1)} + a_2 x^{(2)} + a_3 x^{(3)} + a_4 x^{(4)} + a_5 x^{(5)}$がすべての x に対して成立するように、定数 a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 を定めよ。

（電通大）

18. k , l , m , n は負でない整数とする。0 でないすべての x に対して、

等式 $\dfrac{(x+1)^k}{x^l} - 1 = \dfrac{(x+1)^m}{x^n}$ を成り立たせるような k , l , m , n の組を求めよ。

（東京大）

19. (1) 不等式 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{2}$ を満足する自然数 p , q の組 (p, q) をすべて求めよ。ただし、$p \geqq 3$, $q \geqq 3$ とする。

(2) $yz + zx + xy = xyz$ を満たす自然数 x , y , z の組をすべて求めよ。

（茨城大 , 青山学院大）

20. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{2}$ をみたす正の整数 p , q , r の組 (p, q, r) の個数を求めたい。r のとり得る範囲は[　　]$\leqq r \leqq$[　　]である。$r = 3$ となる組は[　　]個あり、$r = 4$ となる組は[　　]個あり、$r = 5$ となる組は[　　]個ある。このように続けて計算すると、結局求める組は[　　]個である。

（関西大）

21. $\dfrac{2p-1}{q}$, $\dfrac{2q-1}{p}$ がともに整数のとき、p , q の整数の組を求めよ。ただし、$p > q > 1$ とする。

（同志社大）

22. x , y , z を未知数として含む方程式 $2xy + 2xz - xyz = 4z$ で、$x \geqq 1$, $y \geqq 3$, $z \geqq 3$ をみたす整数解をすべて求めよ。

（神戸大）

23. a , b を整数とする。x , y の連立方程式 $ax + 3by = 1$, $bx + ay = 0$ が整数の解をもつような組(a, b)のうちで、$0 \leqq a$, $0 \leqq b \leqq 5$ をみたすものをすべて求めよ。

（東京工大）

24. (1) n を正の整数とするとき、$P=n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ は整数であることを証明せよ。

(2) (1)の正数 P は 3 で割り切れることを証明せよ。

（順天堂大）

25. m , n を正の整数とするとき、$2m+3n$ と表せない整数は何個あるか。

（東京理科大）

26. 実数を係数とする 3 次式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ において、x の任意の有理数値にして $f(x)$ も有理数値をとるならば、a , b , c , d はすべて有理数であることを証明せよ。

（立教大）

27. n を任意の自然数とするとき、

(1) $n<\sqrt{n(n+1)}<n+1$ を証明せよ。

(2) $\sqrt{n(n+1)}$ は無理数であることを証明せよ。

（近畿大）

28. a , b , c , d は有理数であり、$(\sqrt{2}+i)^4+a(\sqrt{2}+i)^3+b(\sqrt{2}+i)^2+c(\sqrt{2}+i)+d=0$ を満たしている（ただし、$i=\sqrt{-1}$ ）。a , b , c , d を求めよ。

（首都大東京）

29. a , b を正の整数とするとき、2 点 $\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}(0, b)$ を結ぶ線分 AB（A , B を除く）上の格子点（2 つの座標がともに整数の点）の個数は、a , b の最大公約数を g とすれば、$g-1$ 個であることを証明せよ。

（横浜国大）

30. 座標平面上において、x, y がともに整数であるような点 (x, y) を格子点とよぶことにする。この平面上で

(1) 辺の長さが 1 で、辺が座標軸に平行な正方形（周をこめる）は少なくとも 1 つの格子点を含むことを証明せよ。

(2) 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正方形（周をこめる）は、どんな位置にあっても、少なくとも 1 つの格子点を含むことを証明せよ。

（京都大）

第１回　数と式 解答

１．$k=0,1,2,3$ のそれぞれの順に $0,0,1,a+b+c$

２．(1) 0　　(2) 1

３．$a^3+d^3+b^3+c^3=(a+d)^3-3ad(a+d)+(b+c)^3-3bc(b+c)$

$=(a+d)^3-3ad(a+d)-(a+d)^3+3bc(a+d)=3(a+d)(bc-ad)$

$3(a+d)(bc+d(b+c+d))=3(a+d)(b+d)(c+d)$

４．4

５．$a^2\leqq 1$ のとき $\dfrac{1}{a}$　　$a^2>1$ のとき a

６．(1) 15　　(2) 0.38

７．(1) $2-2i$　(2) $2+\sqrt{3}i$

８．[−1 , 1]，[4]，[−2 , −1 , 1 , 2]

９．(1) 0　　(2) $(x+1)(x^2+x+1)(2x^2-2x+1)$

10. 4 または $-1\pm\sqrt{5}$

11. (1) -2　(2) $-2\alpha^2+1$　(3) 7

12. (1) $m=1,n=-3,p=-2$　(2) x^2+2x+3

13. $-x^3+3x+1$

14. (1) 4　　(2) $p=6,q=-4,r=-1$ または $p=-2,q=4,r=3$

15. x^3-2x^2+2x-1

16. $a=-n,b=n-1,P(x)=x^{n-2}+2x^{n-3}+\cdots+(n-2)x+(n-1)$

17. $a_0=0,a_1=1,a_2=15,a_3=25,a_4=10,a_5=1$

18. $k=1,l=1,m=0,n=1$

19. (1)　$(p,q)=(3,3)(3,4)(3,5)(4,3)(5,3)$

　(2)　$(x,y,z)=(2,3,6)(2,4,4)(2,6,3)(3,2,6)(3,3,3)$

　　　$(3,6,2)(4,2,4)(4,4,2)(6,2,3)(6,3,2)$

20. [3]，[6]，[5]，[3]，[1]，[10]

21. $p=5,q=3$

22. $(x,y,z)=(4,3,3)(6,4,3)(8,3,4)(12,5,3)(20,3,5)$

23. $(a,b)=(1,0)(2,1)(7,4)$

24. (1)　$P=n^3+\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n=\dfrac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$ より

(2) ★　$P=\dfrac{1}{2}n(n+1)(2n+1)=3\times\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=3\sum_{k=1}^{n}k^2$ より

25. $1, 2, 3, 4, 6$ の 5 個

26. $\begin{cases} f(0)=d \\ f(1)=a+b+c+d \\ f(-1)=-a+b-c+d \\ f(2)=8a+4b+2c+d \end{cases}$ より a, b, c, d はすべて有理数を証明する。

27. (1) $0<n^2<n(n+1)<(n+1)^2$ より

(2) $\sqrt{n(n+1)}=\dfrac{q}{p}$ とすると、$n(n+1)=\dfrac{q^2}{p^2}$ で、左辺が整数より $p=\pm 1$ となり、(1)の不等式に反する。

28. $a=0, b=-2, c=0, d=9$

29. 直線 AB の式は $y=-\dfrac{b}{a}x+b$ で、$a=ga', b=gb'$（a, b は互いに素）だからもとの式は $y=\dfrac{b'}{a'}x+gb'$ である。ここで、y は整数より x は a' の倍数でないといけない。また、$0<x<a=ga'$ より、x のとりうる値は $a', 2a', \cdots, (g-1)a'$ の $g-1$ である。

30. (1) a, b を整数とすると、$a \leqq x \leqq a+1, b \leqq y \leqq b+1$ より。

(2) 1 辺の長さ $\sqrt{2}$ の正方形の内接円の半径は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ で、その内接円に内接する正方形の 1 辺の長さは 1 である。