スタンダード演習

方程式・不等式

１．連立方程式 $\begin{cases} -ax+3=6y \\ 2x-a=(4+a)y \end{cases}$ について、次の各問いに答えよ。ただし、a は実数の定数とする。

(1) この連立方程式を x, y について解け。

(2) 解 x, y がともに負となるような a の値の範囲を求めよ。

（九州産大）

２．次の連立 1 次方程式の解について論述せよ。

$$\begin{cases} x+ay=b \\ 2x+cy=d \end{cases}$$

（和歌山県立医大）

３．x , y の連立方程式 $\begin{cases} 2x+5y=kx \\ 3x+4y=ky \end{cases}$ について、次の各問いに答えよ。

(1) $k=6$ のときの解を求めよ。

(2) $x=0$, $y=0$ 以外の解をもつとき、k の値を求めよ。

(3) $x>0$, $y>0$ をみたす解が存在するときの k の値を求めよ。

（横浜国大）

４．(1) $2x^2-4xy+4y^2+2x+1=0$ をみたす実数 x , y の値を求めよ。

（北海道薬大）

(2) 連立方程式 $\begin{cases} x+y=2 \\ xy-z^2=1 \end{cases}$ の実数解 x , y , z を求めよ。

（大阪女大）

５．a , b が実数のとき、x , y , z の連立方程式 $\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b \end{cases}$ が実数解をもつための条件を求めよ。

（愛知大）

６．k が実数のとき、x に関する 2 次方程式 $7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$ が 2 つの実数解をもち、それらが $0<x<1$ および $1<x<2$ にそれぞれ 1 つずつあるための必要十分条件は「[　　] $<k<$ [　　] または [　　] $<k<$ [　　]」である。

（東京大）

7． a を任意の実数とするとき、2 次方程式 $3x^2-2ax+a-1=0$ は必ず 1 より小さい正の解をもつことを証明せよ。

（近畿大）

8． 方程式 $x^2-12x+4a+15=0$ の 2 つの実数解の絶対値がともに正の実数 a より小さくないとき、a の値の範囲を求めよ。

（東京医大）

9． a,b は実数で、2 次方程式 $x^2-2ax+b=0$ は虚数解 α をもつとする。いま、$\alpha+1$ が、2 次方程式 $x^2-2bx+a+1=0$ の解であるとき、a,b の値および前の 2 次方程式の解を求めよ。

（甲南大）

10. 次の条件をみたすような点 (p,q) の存在範囲を図示せよ。

2 次方程式 $x^2-px+q=0$ が相異なる実数解 α,β をもち、その α,β に対し、2 次方程式 $x^2-2\alpha\beta x-\alpha^2-\beta^2+8=0$ が 2 つの異なる負の解をもつ。

（広島大）

11, 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が連続した 2 つの整数を解にもち、2 次方程式 $x^2+bx+a=0$ が正の整数を解にもつとき、a,b の値を求めよ。

（東北大）

12. 方程式 $(1+pi)x^2+(1-i)x-6-2i=0$ の 1 つの解が実数であるように実数 p の値を定め、かつそれに対する 2 つの解を求めよ。

（法政大）

13. (1) 方程式 $|x^2+ax+b|=bx+a \quad (0<a<2)$ が $-\dfrac{a}{b}$ でない相異なる 3 個の実数のみを解とするための条件を求めよ。

(2) この場合の 3 実数解を求めよ。

（東京医歯大）

14. 3 次方程式 $x^3+3ax+b=0$ が重解をもつための、実係数 a,b に対する条件を求めよ。またこの条件のもとで、この方程式を解け。

（明治大）

15. x の 3 次方程式 $x^3+4x^2+ax+b=0$ の１つの解は１で、他の 2 つの解 α,β はともに 0 でない整数である。このとき、

(1) a は奇数で、b は偶数であることを示せ。

(2) α,β が同符号であるとき、a,b の値を求めよ。

（鹿児島大）

16. a を実数の定数とするとき、x の 3 次方程式 $x(x-1)(x-2)=a(a+1)(a+2)$ がただ 1 つの実数解をもつ条件を求めよ。

（関西学院大）

17. $a \leqq b < c < d$ のとき、方程式 $(x-b)^2=(x-a)(x-c)(x-d)$ は 3 つの相異なる実数解をもつことを証明せよ。

（東京女大）

18. p, q, n を正の整数とする。このとき、x の 3 次方程式 $x^3+px^2+qx+2^n=0$ が虚数解 $1+\sqrt{15}i$ （$i=\sqrt{-1}$）をもつならば $p=$[　ア　], $q=$[　イ　], $n=$[　ウ　]であり、この方程式の実数解は[　エ　]である。

（千葉工大）

19. 実数 a, b に対して、3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+1=0$ は 1 つの実数解と 2 つの虚数解 α, α^2 をもつという。このとき、a, b はどんな数か。

（名古屋工大）

20. (1) 方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0$ の実数解は $-1, 1$ だけであった。このとき実数 a, b, c の値を求めよ。

（京都産大）

(2) 4 次方程式 x^4+[　]x^3-9x^2-2x+[　]$=0$ の 4 つの解は $1, 2,$[　],[　]である。

（東北歯大）

21. (1) $x+\dfrac{1}{x}=a$ が正の 2 つの解（重解を含む）をもつ条件を求めよ。

(2) $x^4-bx^3+11x^2-bx+1=0$ の解がすべて正の実数となるための条件を求めよ。

（愛知大）

22. $x+y \geqq 1, y+z \leqq 2, z+x \geqq 3, x-y \leqq 1$ を満足する x の範囲を求め、y, z を x を使って表せ。

（武蔵大）

23. 実数 x, y が不等式 $-x+\dfrac{1}{2}x^2 < y < \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}x^2$ をみたすとき、$\dfrac{y}{x}$ のとりうる範囲を求めよ。

（東海大）

24. a, b, c を実数、p, q, r を正の実数とし、$\dfrac{a}{p}, \dfrac{b}{q}, \dfrac{c}{r}$ のうち最大のものを L、最小のものを S とすれば、$S \leqq \dfrac{a+b+c}{p+q+r} \leqq L$ であることを証明せよ。

（富山大）

25. 実数 x , y のうちの小さくないほうの数を $\max(x\,,\,y)$ で表すとき、正の数 a , b , c に対して、不等式 $\max(a+b\,,\,c) \leqq \max(a\,,\,c)+\max(b\,,\,c)$ を証明せよ。

（東京女大）

26. a , b , c が相異なる実数のとき、$a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab>0$ が成り立つことを証明せよ。さらに、$a<c$ ならば、$\dfrac{b^4-a^4}{b-a}<\dfrac{c^4-b^4}{c-b}$ が成り立つことを証明せよ。

（九州産大）

27. (1) $a \geqq 2, b \geqq 2, c \geqq 2$ のとき、$3abc$ と $4(a+b+c)$ との大小関係をくらべよ。

（愛媛大）

(2) $a<b, c<d, 2a+3b=2c+3d, d-c \leqq b-a$ が成り立つとき、a , b , c , d を小さいほうから順に並べよ。

（宮城教育大）

28. 次の 2 式の大小関係をそれぞれ比べよ。ただし、$x>0$, $y>0$, $z>0$ とする。

(1) $(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}$ と $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$

(2) $(x^3+y^3+z^3)^{\frac{1}{3}}$ と $(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$

（東北学院大）

29. $ax^2+bx+c>|x|$ がすべての実数 x について成立するために実数 a , b , c がみたすべき条件を求めよ。

（愛知教育大）

30. (1) 不等式 $2x^2-(a-4)x-a(a-2)<0$ を解け。

(2) $0<x<1$ なるすべての x が(1)の不等式を満足するときの a の値の範囲を求めよ。

（神奈川大）

31. 正の整数 n が与えられている。このとき

(1) $\dfrac{x}{xy+1}+\dfrac{y}{yz+1}+\dfrac{z}{zx+1}<\dfrac{1}{n}$ をみたす正の数 x , y , z があることを示せ。

(2) $\dfrac{x}{xy+1}+\dfrac{y}{yz+1}+\dfrac{z}{zx+1}>n$ をみたす正の数 x , y , z があることを示せ。

（お茶の水大）

第２回　方程式・不等式解答

１．（1）　$x=\dfrac{3(3a+4)}{a^2+4a+12}$, $y=\dfrac{6-a^2}{a^2+4a+12}$　　（2）　$a<-\sqrt{6}$

２．$c\neq 2a$ の場合 $x=\dfrac{ad-bc}{2a-c}$, $y=\dfrac{2b-d}{2a-c}$　　$c=2a$ かつ $d\neq 2b$ の場合解なし

$c=2a$ かつ $d=2b$ の場合 $x=b-ay$, y は任意

３．（1）　$x=y=0$　　（2）　$k=-1$ または 7　　（3）　7

４．（1）　$x=-1$, $y=-\dfrac{1}{2}$　　（2）　$x=1$, $y=1$, $z=0$

５．$3b\geqq a^2$

６．$-2<k<-1$ または $3<k<4$

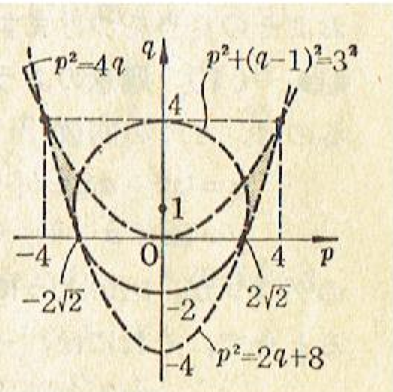
７．$f(x)=3x^2-2ax+a-1$ とおくと $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}<0$

また、$f(0)+f(1)=(a-1)+(2-a)=1$ より、$f(0)>0$ または $f(1)>0$

８．$0<a\leqq 3$, $5\leqq a\leqq \dfrac{21}{4}$

９．$a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$

10.



11.　$(a\,,b)=(-1\,,0)\,,(-3\,,2)$

12.　$(p\,,\alpha\,,\beta)=(1\,,2\,,-2+i)\,,\left(-\dfrac{1}{9}\,,-3\,,\dfrac{78+36i}{41}\right)$

13.　（1）　$a+b=0$　　（2）　$0\,,-a\pm\sqrt{a^2+2a}$

14. $\sqrt[3]{\dfrac{b}{2}}$ （重解）， $-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{2}}$

15. $(a, b) = (-1, -4), (1, -6)$

16. $a < -1 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}, a > -1 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

17. $f(x) = (x-a)(x-c)(x-d) - (x-b)^2$ とおくと $a < b$ のとき $f(b) > 0, f(c) < 0$ より。

$a = b$ のとき $f(x) = (x-a)\{(x-c)(x-d)-(x-a)\}$ で

$g(x) = (x-c)(x-d)-(x-a)$ とおおくと $g(a) > 0, g(c) < 0$ より。

18. [ア]=6 ， [イ]=2 ， [ウ]=8 ， [エ]=-4

19. $a = 2, b = 2$

20. (1) $a = 0, b = -2, c = 0$ (2) $2, 8, -4, -1$

21. (1) $a \geqq 2$ (2) $6 \leqq b \leqq \dfrac{13}{2}$

22. $x \geqq 1, z = 3 - x, y = x - 1$

23. $-1 < \dfrac{y}{x} < \dfrac{1}{2}$

24. $S \leqq \dfrac{a}{p} \leqq L, S \leqq \dfrac{b}{q} \leqq L, S \leqq \dfrac{c}{r} \leqq L$ より

$pS \leqq a \leqq pL, qS \leqq b \leqq qL, rS \leqq c \leqq rL$ であるから、辺々加えて

$S(p+q+r) \leqq a+b+c \leqq L(p+q+r)$

25. $a \leqq \max(a, c), b \leqq \max(b, c)$ より $a + b \leqq \max(a, c) + \max(b, c)$,

また $c \leqq \max(a, c)$, $b, c > 0$ より $\max(b, c) > 0$ 。

よって $c < \max(a, c) + \max(b, c)$

以上より $\max(a+b, c) \leqq \max(a, c) + \max(b, c)$

26. 与式＝$\dfrac{1}{2}\left\{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2\right\} > 0$

$$\frac{b^4 - a^4}{b - a} - \frac{c^4 - b^4}{c - b} = (b^3 + b^2a + ba^2 + a^3) - (c^3 + c^2b + cb^2 + b^3)$$

$$= (a^3 - c^3) + (a^2 - c^2)b + (a-c)b^2 = (a-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) < 0$$

27. (1) $3abc \geqq 4(a+b+c)$ (2) $a < c < d < b$ または $a = c < d = b$

28. (1) $(x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}} < (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ (2) $(x^3 + y^3 + z^3)^{\frac{1}{3}} < (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$

29. $a > 0$ かつ $(b \pm 1)^2 < 4ac$

30. (1) $a > \dfrac{4}{3}$ の場合：$-\dfrac{a}{2} < x < a-2$　　$a = \dfrac{4}{3}$ の場合：解なし

$a < \dfrac{4}{3}$ の場合：$a-2 < x < -\dfrac{a}{2}$

(2) $a \leqq -2\,,\ a \geqq 3$

31. (1) $x = y = z = 3n$ とすれば、左辺 $= \dfrac{3n}{9n^2+1} < \dfrac{3n}{9n^2} = \dfrac{1}{3n} < \dfrac{1}{n}$

(2) $x = 2n\,,\ y = \dfrac{1}{2n}\,,\ z > 0$ とすれば、

$\dfrac{x}{xy+1} = n\,,\ \dfrac{y}{az+1} > 0\,,\ \dfrac{z}{zx+1} > 0$ より

$\dfrac{x}{xy+1} + \dfrac{y}{yz+1} + \dfrac{z}{zx+1} > n$