

# 三角関数

1. (1)  $\frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} = \sqrt{3} - 2, 0 < \theta < \pi$  のとき、 $\sin \theta - \cos \theta$  の値を求めよ。

(広島工大)

(2)  $\tan \theta = \frac{2}{3}$  であるとき、 $\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}$  の値を求めよ。

(熊本大)

2. (1)  $\sin \theta + \cos \theta = a$  のとき、 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta, \sin^3 \theta - \cos^3 \theta$  の値を  $a$  で表せ。

(立教大)

(2)  $\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき、 $\sin^5 x - \cos^5 x$  の値を求めよ。

(横浜市大)

3.  $\tan \frac{\theta}{2} = t$  (ただし、 $t \neq 1$ ) のとき、次の式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

(青山学院大)

4.  $\sin x + \sin y = \frac{1}{2}, \cos x + \cos y = \frac{1}{3}$  であるとき、次のものの値を求めよ。

(1)  $\tan \frac{x+y}{2}$       (2)  $\cos(x+y)$       (3)  $\cos(x-y)$

(静岡女大)

5. (1)  $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$  の値を求めよ。

(北海道教育大)

(2)  $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$  の値を求めよ。

(中央大)

6.  $\cos \frac{2}{9} \pi + \cos \frac{4}{9} \pi + \cos \frac{8}{9} \pi + \cos \frac{10}{9} \pi + \cos \frac{14}{9} \pi + \cos \frac{16}{9} \pi$  の値を求めよ。

(名古屋大)

7. (1)  $\sin 2x - \cos 3x = 0$  の解を  $0 \leq x \leq 2\pi$  の範囲で求めよ。

(静岡大)

(2)  $4\sin^3 \theta + 4\cos^3 \theta = 3\sin \theta + \cos \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  をみたす  $\theta$  の値を求めよ。

(東京女医大)

8. 次の連立方程式を解け。

(1)  $\sin x + \sin y = \sqrt{3}$ ,  $\cos x + \cos y = 1$  ( $0 \leq x < 2\pi$ ,  $0 \leq y < 2\pi$ )

(法政大)

(2)  $\sin(x+y) = \sin \frac{\pi}{5}$ ,  $\cos(x-y) = \cos \frac{\pi}{5}$  ただし、 $0 \leq x \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

(福島県医大)

9. 次の各問いに答えよ。

(1)  $\alpha = \frac{\pi}{10}$  とすれば  $\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$  という関係がある。この式を用いて、 $\sin \frac{\pi}{10}$  を求めよ。

(2)  $\cos \frac{\pi}{5} - \cos^3 \frac{\pi}{5}$  の値を求めよ。

(3)  $\sin \frac{\pi}{10} \cdot \sin \frac{2\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{4\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot \sin \frac{6\pi}{10} \cdot \sin \frac{7\pi}{10} \cdot \sin \frac{8\pi}{10} \cdot \sin \frac{9\pi}{10}$  の値を求めよ。

(東京電機大)

10. (1)  $x$  が任意の実数であるとき、 $2 + \sin 2x$  と  $2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  との大小を調べよ。

(電通大)

(2)  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  のとき、 $\frac{\sin^3 \theta - \cos^3 \theta}{3}$  と  $\frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{2}$  の大小関係を調べよ。

(法政大)

11.  $A, B$  がいずれも鋭角のとき、次の3つの数を大きさの順に並べよ。

$$\sin \frac{A+B}{2}, \quad \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2}, \quad \frac{\sin A + \sin B}{2}$$

(熊本女大)

12.  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$  のとき、 $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{2}$  と  $\tan \frac{\alpha + \beta}{2}$  との大小を比較せよ。

(電通大)

13.  $x$  の関数  $\sqrt{3} \cos x + \sin x$  について  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$  におけるグラフをえがき、かつ最

大値と最小値を求めよ。

(電通大)

14. (1) ①  $f(\theta) = \sin 2\theta + \sin \theta + \cos \theta$  を  $x = \sin \theta + \cos \theta$  の 2 次式として示せ。

②  $\theta$  がすべての実数をとるとき、 $f(\theta)$  の最大値および最小値を求めよ。

(大阪女大)

(2)  $f(\theta) = \sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 3 \cos^2 \theta$  の最大値と最小値を求めよ。

(京都教育大)

15. (1)  $x = \sin 10^\circ$  は 3 次方程式  $8x^3 - 6x + 1 = 0$  の解であることを証明せよ。

(2) この 3 次方程式の他の 2 つの解を求めよ。

(九州大)

16.  $x^2 - \sqrt{3}x - 2 = 0$  の 2 つの解を  $\tan \alpha, \tan \beta$  とするとき、

$\cos^2(\alpha + \beta) - 3 \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta) - 2 \sin^2(\alpha + \beta)$  の値を求めよ。

(東京薬大)

17. 次の 3 つの式を同時にみたす  $x, y$  の組が存在するような  $\theta$  の値を  $0 \leq \theta < \pi$  の範囲で求めよ。

$$x \sin \theta - y \cos \theta = 0, \quad x \sin^4 \theta + y \cos^4 \theta = 0, \quad x^2 + y^2 - 2y < 0$$

(岡山大)

18. 半径  $\sqrt{\frac{5}{2}}$  の円に内接する 3 角形  $ABC$  の面積が 1 で  $2 \sin(A + B) \sin C = 1$  であるとき、この 3 角形の 3 辺の長さを求めよ。

(東北大)

19. 円周上に3点  $A, B, C$  があって、弧  $BC:CA:AB=3:4:5$  で、 $BC=10\sqrt{2}$  とする。

- (1)  $\triangle ABC$  の外接円の半径  $R$  を求めよ。
- (2)  $\triangle ABC$  の面積  $S$  を求めよ。
- (3)  $\triangle ABC$  の内接円の半径  $r$  を求めよ。

(宇都宮大)

20.  $\angle A=90^\circ$  の直角2等辺3角形  $ABC$  と、 $\angle D=90^\circ$ 、 $\angle E=30^\circ$  の直角3角形  $DEF$  があって  $BC=DE$  である。この2つの3角形を1つの平面上に置いて、 $B$  と  $D$ 、 $C$  と  $E$  がそれぞれ重なり、 $A$  と  $F$  とが辺  $BC$  に関して互いに反対側にあるようにする。このとき、辺  $AB$  と線分  $AF$  のなす角を  $\alpha$ 、辺  $BC$  と線分  $AF$  とのなす角を  $\beta$  とすると、

$$\sin \alpha = \sqrt{[\quad] + [\quad] \sqrt{3}} \quad , \quad \sin \beta = \sqrt{[\quad] + [\quad] \sqrt{3}}$$

(東京大)

21. 3角形  $ABC$  の頂点  $A, B, C$  の対辺の長さをそれぞれ  $a, b, c$  とする。関係式

$$a^2 + b^2 + ab = c^2, (2 - \sqrt{3})a^2 = 2b^2$$
 が成り立っているとき、次に答えよ。

- (1) 比  $a:b:c$  を求めよ。
- (2)  $\angle A, \angle B, \angle C$  の大きさをそれぞれ求めよ。

(九州工大)

22.  $\triangle ABC$  において、 $BC=a, CA=b, AB=c$  とするとき、

$$(b-c)\cos^2 A = b\cos^2 B - c\cos^2 C$$
 ならば  $\triangle ABC$  はどんな三角形か。

(宇都宮大)

23.  $\triangle ABC$  において、 $2\cos A + \cos B + \cos C = 2$  が成り立っていれば、

$$2\sin A = \sin B + \sin C$$
 も成り立つことを証明せよ。

(東京薬大)

24. 四辺形  $ABCD$  において、 $\sin A \cdot \sin C = \sin B \cdot \sin D$  なるとき、この四辺形はどんな四辺形か。ただし、等式中の  $A, B, C, D$  は四辺形の頂角を表す。

(大阪大)

25.  $\triangle ABC$  の辺  $BC, CA, AB$  の長さ  $a, b, c$  が  $a^2 + b^2 = 2c^2$  をみたすとき、

- (1)  $\cos C$  を  $a, b$  で表せ。
- (2) 角  $C$  の値の範囲を求めよ。

(東京医歯大)

26.  $\triangle ABC$ の辺  $BC, CA, AB$ の長さをそれぞれ、 $a, b, c$ で表し、角  $A, B, C$ の大きさをそれぞれ  $\alpha, \beta, \gamma$ で表す。 $a, b, c$ が  $a \leq \frac{1}{2}(b+c)$ を満足するとき、

- (1)  $\alpha$ は鋭角であることを示せ。
- (2)  $\alpha$ と  $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ との大きさを比較せよ。

(鹿児島大)

27. (1) 三角形  $ABC$ で角  $A$ の2等分線と辺  $BC$ との交点を  $D$ とする。

$BC=a, CA=b, AB=c$ で  $AD=m$ を表す式を導け。

- (2)  $\triangle ABC$ の角  $A$ の2等分線の長さ  $m$ と辺  $b, c$ の間に  $\frac{1}{m} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ なる関係式が成り立つとき、角  $A$ の大きさを求めよ。

((1)東海大・(2)東邦大)

28. 円に内接する1辺の長さ  $a$ の正三角形  $ABC$ がある。いま、 $\angle ACB$ 内に弦  $CP$ をひき、 $\angle ACP = \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ )とするとき、

- (1)  $\triangle APC$ の面積を  $a$ と  $\theta$ とを用いて表せ。
- (2)  $\triangle APC$ の面積と、 $\triangle APB$ の面積の和を最大にする  $\theta$ と、その最大値を求めよ。

(広島大)

29. 1辺の長さが  $a$ である正方形  $ABCD$ の対角線の交点  $O$ を中心として、この正方形をその平面内で  $\theta$ だけ回転したものを  $A'B'C'D'$ とする。はじめの正方形とあとの正方形との共通部分の面積  $S$ を求めよ。また  $\theta$ を変化させるとき、 $S$ の最小値を求めよ。

(神戸薬大)

30. (1) 直角2等辺3角形  $ABC$ の斜辺  $BC$ は平面  $\pi$ 上にあり、 $AB$ が  $\pi$ となす角は  $30^\circ$ である。 $\triangle ABC$ を含む平面と  $\pi$ となす角  $\alpha$ はいくらか。ただし、 $\alpha$ は鋭角とする。
- (2) (1)において、 $\triangle ABC$ を直角3角形とし、 $AB, AC$ が  $\pi$ となす角をそれぞれ  $\beta, \gamma$ とすると、 $\sin \alpha$ を  $\beta, \gamma$ を用いて表せ。

(山梨大)

31. 変数  $t$ が  $0$ から  $\pi$ まで動くとき、 $x = 2 \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$ ,  $y = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ によって表される点  $(x, y)$ と原点  $(0, 0)$ との間の距離の最大値・最小値およびそれらをとる  $t$ の値を求めよ。

(東京大)

第4回 三角関数解答

1. (1)  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$  (2)  $\frac{1}{5}$
2. (1)  $-\frac{1}{2}a^3 + \frac{3}{2}a$ ,  $\pm \frac{1}{2}\sqrt{2-a^2}(a^2+1)$  (2)  $\frac{19\sqrt{2}}{32}$
3.  $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{1+t^2}$  より  $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \tan \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$   
 $\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$   $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2t}{1-t^2}$
4. (1)  $\frac{3}{2}$  (2)  $-\frac{5}{13}$  (3)  $-\frac{59}{72}$
5. (1)  $\frac{1}{8}$  (2)  $\frac{\sqrt{3}}{8}$
6. 0
7. (1)  $\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}, \frac{17\pi}{10}$  (2)  $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$
8. (1)  $x = y = \frac{\pi}{3}$  (2)  $(x, y) = \left(0, \frac{\pi}{5}\right), \left(\frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\right)$
9. (1)  $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$  (2)  $\frac{\sqrt{5}}{8}$  (3)  $\frac{5}{256}$
10. (1)  $2 + \sin 2x \geq 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  等号成立は  $x = 2n\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$   
 (2)  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$  のとき  $\frac{\sin^3 \theta - \cos^3 \theta}{3} > \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{2}$   
 $\theta = \frac{\pi}{4}$  のとき  $\frac{\sin^3 \theta - \cos^3 \theta}{3} = \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{2}$   
 $\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$  のとき  $\frac{\sin^3 \theta - \cos^3 \theta}{3} < \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{2}$
11.  $\frac{\sin A + \sin B}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2} < \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2}$

12.  $\alpha = \beta, \alpha + \beta = 0$  のとき  $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{2} = \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$

$\alpha \neq \beta, \alpha + \beta > 0$  のとき  $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{2} > \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$

$\alpha \neq \beta, \alpha + \beta < 0$  のとき  $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{2} < \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$

13. 最大値 2      最小値 -1

14. (1) ①  $f(\theta) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$     ② 最大値  $1 + \sqrt{2}$     最小値  $-\frac{5}{4}$

(2) 最大値 4      最小値 0

15. (1)  $\sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ = \frac{1}{2}$     (2)  $\sin 50^\circ, -\sin 70^\circ$

16.  $\frac{1}{4}(1 - 3\sqrt{3})$

17.  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$

18.  $\sqrt{5}, 2\sqrt{2}, 1$

19. (1) 10      (2)  $25(3 + \sqrt{3})$       (3)  $\frac{5(\sqrt{6} + \sqrt{2} - 2)}{2}$

20.  $\frac{5}{13}, -\frac{2}{13}, \frac{11}{26}, \frac{3}{13}$

21. (1)  $a : b : c = 2 : (\sqrt{3} - 1) : \sqrt{6}$     (2)  $A = \frac{\pi}{4}, C = \frac{2\pi}{3}, B = \frac{\pi}{12}$

22.  $b = c$  または  $A = 120^\circ$

23.  $b = c \cos A + a \cos C, c = a \cos B + b \cos A$  (第1余弦定理) より

$b + c = a(\cos B + \cos C) + (b + c) \cos A$  であるから、

$$a(\cos B + \cos C) = (b + c)(1 - \cos A)$$

$$\therefore \cos B + \cos C = 2(1 - \cos A) \neq 0$$

24. 台形

25. (1)  $\frac{a^2+b^2}{4ab}$  (2)  $0 < C \leq \frac{\pi}{3}$

26. (1)  $\cos \alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \geq \frac{1}{2} \left\{ b^2+c^2 - \frac{(b+c)^2}{4} \right\} = \frac{3b^2-2bc+3c^2}{8bc}$   
 $= \frac{3(b-c)^2+4bc}{8bc} \geq \frac{4bc}{8bc} = \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha \leq \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \quad (2) \quad \alpha \leq \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$

27. (1)  $BD = \frac{ca}{b+c}$ 、また $\triangle ABD$ において  $m^2 = c^2 + \left( \frac{ca}{b+c} \right)^2 - 2c \cdot \frac{ca}{b+c} \cos B$   
 $= c^2 + \left( \frac{ca}{b+c} \right)^2 - \frac{c}{b+c} (c^2 + a^2 - b^2) = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \quad (2) \quad A = \frac{2}{3}\pi$

28. (1)  $\frac{a^2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \sin \theta \quad (2) \quad \theta = \frac{\pi}{4}$  のとき最大値  $\frac{a^2}{2}$

29.  $S = \frac{2a^2}{\sin \theta + \cos \theta + 1} \quad \text{最小値は } 2(\sqrt{2}-1)a^2$

30. (1)  $45^\circ$

(2)  $\sqrt{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma}$

31. 最大値 2      最小値 1       $t = \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}$