スタンダード演習

ベクトルと座標

１．点Oを原点とする座標平面上の1点を$P(2,1)$とし、ベクトル$\overrightarrow{OP}$を正の方向に30°回転したベクトルを$\overrightarrow{OQ}$とする。このとき、

(1) 点Qの座標を求めよ。

(2) 点Sの座標を$(2\sqrt{3}-7,\sqrt{3}-1)$とするとき、ベクトル$\overrightarrow{OS}$を$\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}$で表せ。

（琉球大）

２．４角形$ABCD$の辺AB,CDの中点をそれぞれP,Qとし、ACとPQの交点Rが$2\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{RC},\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{RQ}$をみたすとする。このとき、$\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{AB}$を$\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$で表せ。

（静岡大）

３．３角形OABにおいて、$\angle AOB$の２等分線と辺ABとの交点をC、$\angle OAB$の２等分線と辺OBとの交点をD、$\angle OBA$の２等分線と辺OAとの交点をEとする。また、$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},OA=a,OB=b,AB=c$とする。このとき、

(1) $\overrightarrow{OC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE}$を$\vec{a},\vec{b},a,b,c$を用いて表せ。

(2) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}=\vec{0}$となるのはどのような場合か。

（九州大）

４．aを1より大きい実数とする。このとき、2つの放物線

$y=x^2-2x+a\cdots$ ① $,\ y=-x^2-4x+\dfrac{a^2}{2}\cdots$ ② において、①の頂点をA、②の頂点をB、また①、②の交点で、x座標の小さい方をP、他方をQとする。

(1) A,B,P,Qの座標を求めよ。

(2) 線分ABを$4:3$に内分する点をMとする。ベクトル$\overrightarrow{PM}$とベクトル$\overrightarrow{PQ}$の間に$\overrightarrow{PM}=k\overrightarrow{PQ}$が成り立つとき、$a$と$k$の値を求めよ。

（神戸大）

５．平面上の3つの位置ベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が与えられているとき、$\vec{x}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ であるような位置ベクトル$\vec{x}$の終点の集合を図示せよ。

ただし、p , q , r は $p\geqq 0$, $q\geqq 0$, $p+q=2$, $2\leqq r\leqq 3$ をみたすものとする。

（電通大）

６．$\triangle ABC$ を含む平面上に、A と異なる点 P をとり、$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ (x , y : 実数) とする。

⑴　直線 AP と直線 BC が平行であるならば、x と y の間にどのような関係があるか。

⑵　直線 AP と直線 BC が1点 Q で交わるとき、$\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, x 及び y を用いて表せ。

（京都産大）

７．$\angle A$ が直角である直角3角形 ABC の斜辺 BC の中点を M とし、辺 AB , AC 上にそれぞれ点 P,Q をとり、$MP\perp MQ$ となるようにする。

⑴　$\overrightarrow{MB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{MP}=\vec{p}$, $\overrightarrow{MQ}=\vec{q}$ のとき、$\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot(\vec{p}-\vec{q})$ であることを証明せよ。

⑵　$PB^2+QC^2=PQ^2$ であることを証明せよ。

（筑波大）

８．4辺形 $ABCD$ の内部の点を O とする。$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OD}$ とは大きさ等しく互いに垂直である。また $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ も大きさが等しく互いに垂直であるとき、

⑴　$x+y=1$, $0\leqq y\leqq 1$ のとき、$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ をみたす点 P はどのような図形上にあるか。

⑵　さらに、⑴の $\overrightarrow{OP}$ が $\overrightarrow{CD}$ に垂直であるとき、P はどのような点か。

（九州工大）

９．1辺の長さ1の正6角形の1つの頂点を始点とし、他の頂点を終点とする有向線分の表す5つのベクトルから異なる2つをとって内積を作るとき、その最大値、最小値を求めよ。

（東京理科大）

10. 3角形OABの辺AB上の点Pから、直線OA, OBに垂線を下ろし、その足をそれぞれQ, Rとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$とするとき、

(1) $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{(\vec{p}\cdot\vec{a})}{(\vec{a}\cdot\vec{a})}\cdot\vec{a}$, $\overrightarrow{OR}=\dfrac{(\vec{p}\cdot\vec{b})}{(\vec{b}\cdot\vec{b})}\cdot\vec{b}$であることを証明せよ。

(2) $\overrightarrow{OP}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ $(0\leqq t\leqq 1)$と表す。$\overrightarrow{OP}$と$\overrightarrow{QR}$が直交するときのtの値を求めよ。

（名古屋工大）

11. 点Oを中心とする半径1の円周上に3点A, B, Cがある。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とおくとき、$\vec{a}+2\vec{b}+t\vec{c}=\vec{0}$という関係がある。ただし、

$1<t<3$とする。

(1) 内積$(\vec{a}, \vec{b})$, $(\vec{b}, \vec{c})$, $(\vec{c}, \vec{a})$をtを用いて表せ。

(2) $\angle ABC=\dfrac{\pi}{4}$のとき、$3$角形$ABC$の面積を求めよ。

（大阪市大）

12. 原点Oを中心とし半径aの円に内接する正3角形ABCがある。このとき、原点を中心とし半径bの円周上に点Pをどのようにとっても、次の各式は一定値をとることを示し、かつ、その一定値をそれぞれ求めよ。

(1) $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$

(2) $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PA})+(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PB})+(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PC})$

（順天堂大）

13. 平面上に定3角形ABCと動点Pがあり、2つの不等式

$(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AB})\geqq 0$, $(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{AC})\geqq 0$をみたしている。

(1) 線分AP, BP, CPのうち、長さの最大なものを求めよ。

(2) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})<0$のとき、線分$AP$の長さの最小値を求めよ。

（横浜国大）

14. 成分が$(1,2,3)$のベクトル$\vec{a}$と点$Q(4,5,6)$がある。

(1) xy平面上に点Pをとり$\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{a}$となるとき、点$P$の座標を求めよ。

(2) z軸上に点Rをとり$\overrightarrow{RQ} \perp \vec{a}$となるとき、点$R$の座標を求めよ。

（東京歯大）

15. 点$A(1,-2,3)$を通り、成分が$(1,2,1)$のベクトルに平行な直線をlとする。
点$P(4,5,6)$からlに垂線を下ろし、その交点をHとする。

(1) ベクトル$\overrightarrow{AH}$の成分を求めよ。

(2) 2点P, H間の距離を求めよ。

（徳島大）

16. 点$Q(-1,1,4)$を通り、ベクトル$\overrightarrow{N}=(-1,1,-1)$に垂直な平面に点$P(1,2,-3)$から下ろした垂線の足の座標を求めよ。

（早稲田大）

17. 空間の3点$A(1,1,1)$, $B(4,3,0)$, $C(2,0,-1)$を通る平面をπとする。

(1) πに垂直な単位ベクトル$\vec{n}$を求めよ。

(2) 点$P(2,2,-5)$から、πに引いた垂線の長さを、ベクトル$\overrightarrow{PA}$と$\vec{n}$を利用して求めよ。

（神奈川歯大）

18. (1) 空間の4点$A(-1,2,1)$, $B(1,3,-1)$, $C(2,2,1)$, $D(l,m,n)$がある。3点A,B,Cを通る平面上に点Dがあるためにはl,m,nはどんな関係をみたすことが必要十分条件であるか。
(2) 空間における4点$A(3,4,5)$, $B(4,5,x)$, $C(1,2,x)$, $D(1,1,1)$が同一平面上にあるのは$x=$[　　]のときである。

（東京理科大）

19. 空間における直線$x-1=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$について、次の問いに答えよ。

(1) この直線と同じ方向をもつ長さ1のベクトルを求めよ。
(2) 点$P(2,3,4)$からこの直線に下ろした垂線の足をHとするとき、この直線上の

$Q(1,2,3)$と点Hの間の距離を求めよ。

（島根大）

20. 直線$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{4}$と平面$2x+4y+z-3=0$との交点$P$を通り、平面$\pi: x-2y+3z+6=0$に垂直な直線の方程式は[　　　]である。また、点$P$から平面$\pi$にいたる距離は[　　　]である。

（旭川医科大）

21. 点$(-3,4,5)$の、平面$3x+2y+z+1=0$に関する対称点の座標を求めよ。

（芝浦工大）

22. 空間に4点$A(1,2,-1)$, $B(7,5,-4)$, $C(-1,3,0)$, $P(3,3,k)$がある。

(1) 線分ACを$\overline{AQ}:\overline{QC}=2:1$に外分する点$Q$の座標を求めよ。

(2) 2点P,Qを通る直線lの方程式を求めよ。

(3) 2点B,Cを通る直線をmとする。直線lとmが交わるようにkの値を定めよ。また、その交点Rは線分BCをどのような比に分けるか。

（宮崎大）

23. 空間に2点$A(2,0,1)$, $B(0,1,2)$が与えられている。Oは座標の原点とするとき、

(1) $\angle AOB=\theta$とすると、$\cos\theta$の値は[　　]

(2) $\triangle AOB$の面積をSとすると、$S=$[　　]

(3) ベクトル$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$のどちらにも垂直な単位ベクトルの成分は[　　　]

(4) 平面OAB上の任意の点を$P(x,y,z)$とするとき、x,y,zの間に成り立つ関係式は[　　]

（近畿大）

24. 空間に4点$A(1,1,1)$, $B(3,4,2)$, $C(2,3,2)$, $D(2,2,4)$がある。

(1) ベクトル$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$に垂直な単位ベクトル$\vec{e}$の成分を求めよ。

(2) 3角形ABCを含む平面上に任意の点$P(x,y,z)$をとるとき、x,y,zの間にどんな関係式が成立するか。

(3) 点Dより(2)の平面に下した垂線の長さを求めよ。

（北海道大）

25. 空間に5点$O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,3)$, $M(1,3,0)$がある。点Oより平面にAMCにおろした垂線の足をHとする。

$\angle COH=\theta$, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{OH}=\vec{h}$ として、つぎに答えよ。

(1) $\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) $\vec{h}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

（九州工大）

26. 空間の点 $P(-1,4,-7)$ を通り、ベクトル $\vec{l}=(4,5,3)$ の方向をもつ直線 l と、点 $Q(3,5,1)$ を通り、ベクトル $\vec{m}=(2,2,1)$ の方向をもつ直線 m がある。次の各問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を成分で表せ。また、その長さを求めよ。

(2) ベクトル $\vec{l}$, $\vec{m}$ のどちらにも垂直なベクトル $\vec{n}=(a,b,c)$ の成分の比をなるべく簡単な整数の比で表せ。

(3) 点 P を通り、方向がベクトル $\vec{n}$ で与えられる直線を n とするとき、ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ の直線 n 上への正射影の長さを求めよ。

（法政大）

27. 空間の直交座標系 $O-xyz$ の x 軸、 y 軸、 z 軸上に O を始点とする単位ベクトル $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ をとる。ベクトル $\overrightarrow{OX}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}+z\overrightarrow{e_3}$ を (x,y,z) ともかく。O を始点とする。2 つのベクトル $\overrightarrow{a_1}=(1,1,0)$, $\overrightarrow{a_2}=(0,1,1)$ を含む平面を π とする。このとき、

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}=(5,3,4)$ を $\vec{p}+s\overrightarrow{e_3}$ （ $\vec{p}$ は平面 π 上のベクトル）の形でかき表したとき、ベクトル $\vec{p}$ と実数 s を求めよ。

(2) 点 A から平面 π へ下ろした垂線の足を B とするとき、ベクトル $\overrightarrow{OB}$ を $\overrightarrow{a_1}$ と $\overrightarrow{a_2}$ とを用いてかき表せ。

（東京農工大）

28. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を空間のベクトルとする。$x^2+2y^2+3z^2=1$ をみたすすべての実数 x, y, z に対して、ベクトル $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ の長さはつねに 1 であるという。

(1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の長さを求めよ。

(2) 内積 $(\vec{a}, \vec{b}), (\vec{a}, \vec{c}), (\vec{b}, \vec{c})$ を求めよ。

（東京工大）

29. 原点 O を 1 端とし、点 $(1, 2, 2)$ を通る半直線を g とする。
(1) g 上の点で原点からの距離が $3t$ （$t \geqq 0$）である点の座標を求めよ。
(2) いま、x 軸、y 軸および直線 g の上に、それぞれ適当に点 A, B, C をとり、ほかに 1 点 $D(k, 3, -1)$ をとる。4 点 A, D, B, C をこの順序で結んでできる 4 辺形がひし形になるには、k はどんな値をとればよいか。

（神戸大）

30. 球面 S と xy 平面との交わりが円 $x^2+y^2-4x-6y+a=0 \cdots$①で、yz 平面との交わりが円 $y^2+z^2+by-2z+c=0 \cdots$②であり、円①は直線 $\sqrt{2}x-y=8\sqrt{2}-3$ に接している。

このとき、$a=$[　　], $b=$[　　], $c=$[　　]で、S の中心 O の座標は
([　　], [　　], [　　])、半径は[　　]をである。また、S の各座標平面による切口である 3 つの円の面積の和と S の表面積の比は[　　]：[　　]である。

（立命館大）

31. 平面 α は z 軸の正の部分と交わり、ベクトル $\vec{a}=(2, 1, 2)$ に垂直である。

(1) 球 $x^2+y^2+z^2-2x-2y=11$ を平面 α で切ってできる円の面積が 4π であるとき、α の方程式を求めよ。

(2) ベクトル $\vec{b}=(1, 1, 1)$ をこの平面 α に正射影してできるベクトルの大きさを求めよ。

（横浜市立大）

第５回　ベクトル解答

１．(1) $\dfrac{15}{4}$　(2) $Q\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{2},1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　(3) $\overrightarrow{OS}=-3\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}$

２．(1) $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ，$\overrightarrow{AB}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

３．(1) $\overrightarrow{OC}=\dfrac{b\vec{a}+a\vec{b}}{a+b}$, $\overrightarrow{AD}=-\vec{a}+\dfrac{a\vec{b}}{a+b}$, $\overrightarrow{BE}=\dfrac{b\vec{a}}{a+b}-\vec{b}$　(2) $a=b=3c$

４．(1) $A(1,a-1)$, $B\left(-2,4+\dfrac{a^2}{2}\right)$, $P\left(-\dfrac{a}{2},\dfrac{a^2}{2}+2a\right)$, $Q\left(\dfrac{a}{2}-1,\dfrac{a^2}{4}-a+3\right)$

(2) $a=4, k=\dfrac{3}{7}$

５．略

６．$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{x}{x+y}\overrightarrow{AB}+\dfrac{y}{x+y}\overrightarrow{AC}$

７．(1) $PB\perp CQ$, $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$ より　(2) $PB^2+QC^2=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{QC}$

$=2\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot(\vec{p}-\vec{q})+\vec{p}\cdot\vec{p}+\vec{q}\cdot\vec{q}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}=PQ^2$

８．(1) 点 P は AB（端点を含む）上にある。(2) 点 P は辺 AB の中点。

９．最大値 3、最小値 $-\dfrac{1}{2}$

10．(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$ より $(a,qa-p)=0$、よって $q=\dfrac{(p,a)}{(a,a)}$

(2) $t=\dfrac{\sqrt{(b,b)}}{\sqrt{(a,a)}+\sqrt{(b,b)}}$

11．(1) 順に $\dfrac{t^2-5}{4},-\dfrac{t^2+3}{4t},-\dfrac{t^2-3}{2t}$　(2) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$

12. (1) $3b$ (2) $3(a^2+b^2)$

13. (1) AP (2) $\frac{1}{2}AB$

14. (1) $(2,1,0)$ ② $\left(0,0,\frac{32}{3}\right)$

15. (1) $\left(\frac{10}{3},\frac{20}{3},\frac{10}{3}\right)$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

16. $(3,0,-1)$

17. (1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (2) $2\sqrt{3}$

18. (1) $2m+n=5$ (2) $x=5$

19. (1) $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ (2) $\frac{3\sqrt{14}}{7}$

20. $x-3=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$, $\sqrt{14}$

21. $\left(-\frac{36}{7},\frac{18}{7},\frac{30}{7}\right)$

22. (1) $(-3,4,1)$ (2) $x=-3+6t$, $y=4-t$, $z=1+(k-1)t$

(3) $k=-2$、$4:1$

23. (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{\sqrt{21}}{2}$ (3) $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}},-\frac{2}{\sqrt{21}}\right)$ (4) $x+4y-2z=0$

24. (1) $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (2) $x-y+z=1$ (3) $\sqrt{3}$

25. (1) $\frac{\sqrt{14}}{7}$ (2) $\frac{9}{14}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{c}$

26. (1) $\overrightarrow{PQ}=(4,1,8)$, $|\overrightarrow{PQ}|=9$ (2) $a:b:c=1:(-2):2$ (3) 6

27. (1) $s=6$、$\vec{p}=(5,3,-2)$ (2) $\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{a_1}+2\overrightarrow{a_2}$

28. (1) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, $|\vec{c}|=\sqrt{3}$ (2) $(\vec{a},\vec{b})=0$, $(\vec{a},\vec{c})=0$, $(\vec{b},\vec{c})=0$

29. （1） $(t, 2t, 2t)$ （2） $k=\pm\dfrac{\sqrt{33}}{2}$

30. 順に $-11, -6, -11, 2, 3, 1, 5, 61, 100$

31. （1） $2x+y+2z-12=0$ （2） $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$