スタンダード演習

微分法とその応用

１． $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ のとき、$\dfrac{a^2}{f'(a)}+\dfrac{b^2}{f'(b)}+\dfrac{c^2}{f'(c)}$ の値を求めよ。ただし、a,b,c はたがいに異なる定数とする。

（横浜国大）

２． 関数 $f(x)=2x^3-3x^2-6x+2$ は $x=\alpha$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ で極値をとるものとし、曲線 $y=f(x)$ の上の２点 $A(\alpha,f(\alpha))$, $B(\beta,f(\beta))$ を通る直線を l とする。このとき直線 l の方程式を求めよ。また、A,B 以外の曲線 $y=f(x)$ と直線 l の交点を求めよ。

（東京大）

３． $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対して、方程式 $f(x)+\dfrac{1}{2}x=0$ は相異なる３つの実数解 2 , α , β をもち、$f'(\alpha)=f'(\beta)$, $f'(1)=0$ であるとする。a , b , c を求めよ。

（富山大）

４． (1) x^3-6x+a の極大値、極小値を求めよ。

(2) $|x^3-6x+a|$ の極大値、極小値を求めよ。

（早稲田大）

５． x の関数 $y=x^4-4(a-1)x^3+2(a^2-1)x^2$ が極大値をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。

（大阪大）

６． ３次関数 $f(x)=x^3+3px^2+3qx+r$ に対して、
つねに $f(-x+a)+f(x+a)=2f(a)$ なる関係が成り立つような定数 a がある。このとき

(1) a および $f(a)$ を p,q,r で表せ。

(2) $f(x)$ が $x=2$ で極値－1 をとり、かつ $f(a)=a$ となるときの p , q , r の値を求めよ。

（横浜国大）

７． 関数 $y=f(x)=\{2x^2-(3a+4)x+9a-4\}(x-1)$ の $0\leqq x\leqq 3$ における最大値および最小値を求めよ。ただし、$0<a<2$ とする。

（東京農工大）

８．xの関数$f(x)=x^3-3ax+1$がある。

(1) $0\leqq x\leqq 1$における$f(x)$の最大値を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 1$における$|f(x)|$の最大値$F(a)$を求めよ。

(3) $F(a)$のグラフを書け。

（東京理科大）

９．xの整式$f(x)=2x^n-ntx^2+t^n$において、$t\geqq 0$, $n\geqq 4$とする。

(1) $f(x)$の$x\geqq 0$における最小値を求めよ。

(2) (1)で求めた最小値をtの関数とみなして$g(t)$とおき、$t\geqq 0$におけるその最小値を求めよ。

（中央大）

10. 関数$f(x)=3x^2-ax^3$の区間$0\leqq x\leqq 2$における最小値は−4である。

(1) aの値を求めよ。

(2) 区間$0\leqq x\leqq 2$における$f(x)$最大値Mを求めよ。

（一橋大）

11. (1) $0\leqq x\leqq 3$で定義された関数$f(x)=x^3-3x$の増減を調べて最大値・最小値を求めよ。

(2) $\max\limits_{0\leqq x\leqq 3}|x^3-3x-a|$を最小にする実数$a$の値を求めよ。

ただし、$\max\limits_{0\leqq x\leqq 3}g(x)$は$0\leqq x\leqq 3$における$g(x)$の最大値を表すものとする。

（神戸薬科大）

12. aは実数とし、区間$-1\leqq x\leqq 1$における$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax$の最大値を$F(a)$で表す。

このとき、

(1) 関数$F(a)$のグラフの概形を書け。

(2) 関数$F(a)$が最小になるようなaおよび、そのときの最小値を求めよ。

（九州大）

13. 曲線$y=x^3\ (x>0)$上の点から、直線$y=\dfrac{x}{2}-1$にいたる距離の最小値を求めよ。

（東邦大）

14. たて、よこ、高さの長さの和がaで、表面積が$\dfrac{a^2}{2}$となる直方体の体積をVとする。

(1) Vを高さaのみの関数で示せ。またaの変域を求めよ。

(2) この関数のグラフを書け。

(3) Vの最大値を求めよ。

(4) (3)のときの直方体の形について述べよ。

（足利工大）

15. 底面が半径1の円で長さ1の直円柱がある。底面の1つの直径をABとし、点Aを通る母線（その長さが側面上にある高さに等しい線分）の他の端をCとする。いまAB上に点Pをとり、Pを通ってABに直交する底円の弦をDEとするとき、

(1) $\triangle CDE$の面積をAPの長さxで表せ。

(2) 点PがABの上を動くとき、$\angle CDE$の面積が最大になる点はただ1つであることを示せ。ただし、最大になる点Pの位置は求めなくてよい。

（岐阜大）

16. y軸を軸とする放物線Cと$y = ax\ (a > 0)$が点Pにおいて接している。点Pを通り、$y = ax$に垂直な直線とy軸との交点をQ、放物線Cの頂点をRとするとき、$\dfrac{OR}{OQ}$を求めよ。ただし、Oは原点とする。

（大阪大）

17. $y = x^3 + x^2 + px$のグラフがx軸と相異なる3点で交わり、3交点でのグラフの接線のうち2つは平行であるとする。このとき、pの値を求めよ。

（大阪市大）

18. 2つの曲線$y = x^3 - x$, $y = x^3 - x - 4a^2$について次の問いに答えよ。ただし、aは正の定数とする。

(1) 2曲線の共通接線の方程式を求めよ。

(2) (1)の共通接線と2曲線との交点および接点を左から順にA, B, C, Dとするとき、3つの線分AB, BC, CDの長さの連比を求めよ。

（近畿大）

19. (1) 関数$y = |x^3 - 3x^2 - x + 3| \cdots$①の極値および極値を与える$x$の値をすべて求めよ。

(2) 曲線①と直線$y = ax - 3$とが4点で交わるようなaの範囲を求めよ。

（熊本大）

20. $f(x)=x(x-1)(x-2)$とする。曲線$y=f(x)$上の$x>0$であるどの点も、点における接線の下方にないようなaの値の範囲を求めよ。

（お茶の水大）

21. a,bを実数とするとき、関数$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$について次の問いに答えよ。

(1) 曲線$y=f(x)$上の点$(0,1)$における接線が曲線$y=f(x)$と交わる点の座標(X,Y)を求めよ。

(2) $y=f(x)$は$x=1$で極小値をとり、$-1 \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$なる範囲のいずれかの$x$で極大値をとる。このとき、$a$と$b$のみたす関係式および、$a$のとりうる範囲$D$を求めよ。

(3) (2)をみたすa,bに対して、aが範囲Dを動くとき、(1)で求めた点(X,Y)の軌跡を求め、これを図示せよ。

（神戸大）

22. 4次方程式$2x^4-(3a+2)x^3+3ax^2+(a-b)x-(a-b)=0$が相異なる4つの実数解をもつような点$(a\,,b)$の存在する範囲を図示せよ。

（広島大）

23. $f(x)=x^2+2x+a$について、xの方程式$f(x)=0$が相異なる実数解をもち、$f(f(x))=0$が虚数解γをもつという。γおよびaを求めよ。

（東京工大）

24. a,b,c,dを実数として$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$とおく。

(1) 方程式$f(x)=0$が4個の相異なる実数解をもつとき、実数kに対して、方程式$f(x)+kf'(x)=0$の実数解の個数を求めよ。

(2) 2つの方程式$f(x)=0$、$f''(x)=0$が2個の相異なる実数解を共有するとき、曲線$y=f(x)$はy軸に平行なある直線に関して対称であることを示せ。

（東京大）

25. 4次方程式$f(x)=0$が、解$0\,,\alpha\,,\beta\,,\gamma$（$0<\alpha<\beta<\gamma$）をもつとき、

(1) $\gamma-\beta=\alpha$ならば$f'(0)+f'(\gamma)=0\,,\,f'(\alpha)+f'(\beta)=0$となることを示せ。

(2) $f'(0)=-f'(\alpha)=f'(\beta)=-f'(\gamma)$となる場合はないことを示せ。

（群馬大）

26. 方程式$x^5-5p^4x+q=0$の相異なる実数解の数は実数$p\,,q$によって定まる。この数が最大となる条件を$p\,,q$の関係で表せ。ただし、$p>0$とする。

（お茶の水大）

27. $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$とする。

(1) $f(x)$の導関数$f'(x)$を求めよ。

(2) $f(x)$と$f'(x)$の関係を示せ。

(3) (2)を利用して、$f(x)=0$の実数解の個数を調べよ。

（東京大）

28. (1) $f(x)=x^3-5x^2+3x+a$とする。xの正の値に対し、つねに$f(x)>0$となるのはどのようなときか。

（京都大）

(2) $p>q$なる2つの自然数p,qと1でない正数xがあるとき、

$\dfrac{x^p-1}{p}>\dfrac{x^q-1}{q}$を証明せよ。

（愛知学院大）

29. たがいに異なる3つの正数a, b, cがこの順で等差数列をなすとき、整数n（$n>1$）に対して$a^n+c^n>2b^n$となることを証明せよ。

（横浜市大）

30. 2つの動点P, Qが直線$y=x+1$上の定点Aおよび直線l上の定点Bをそれぞれ同時に出発し、これらの直線上を動く。t秒後のP, Qのx座標はそれぞれ$x=t(t-3)^2$, $x=\dfrac{5}{4}t(t-3)$である。

(1) 点Pは、t_1秒後に向きを変えて進み、t_2秒後にはふたたび向きを逆に変えて進む。t_1, t_2におけるPの位置M, Nを求めよ。

(2) t_2秒後のP, Qの位置は原点Oに関して対称な位置にあり、Pがふたたび点Mを通るとき$OP\perp OQ$である。直線lの方程式を求めよ。

（高知大）

31. 初速度p（$m/$秒）で地上からま上に飛び上がった人が、t秒後の瞬間に地上s（m）上方にいるとすると、sとtの間には$s=f(t)=pt-\dfrac{1}{2}\alpha t^2$（地球上では$\alpha=9.8$（$m/$秒^2））の関係がある。このとき、つぎの問いに答えよ。

(1) sが最大になるときのtの値を求めよ。またそのときのsの値を求めよ。

(2) sの最大値が1（m）になるための初速度p（$m/$秒）の値を求めよ。

(3) 地球上で最高$1m$飛び上がることができる人は月面上では何m飛び上がることができるか。（月面上では$\alpha=1.6$（$m/$秒^2））

（相模工大）

第６回　微分法とその応用解答

１．1

２．$y=-5x+1$　　　$\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$

３．$a=-6\,,b=9\,,c=-3$

４．(1) 最大値 $4\sqrt{2}+a$　最小値 $-4\sqrt{2}+a$

(2) $a>4\sqrt{2}$ のとき極大値 $4\sqrt{2}+a$　　　極小値 $0\,,-4\sqrt{2}+a$

$a=4\sqrt{2}$ のとき極大値 $4\sqrt{2}+a$　　　極小値 0

$-4\sqrt{2}<a<4\sqrt{2}$ のとき極大値 $4\sqrt{2}\pm a$　極小値 0

$a=-4\sqrt{2}$ のとき極大値 $4\sqrt{2}-a$　　極小値 0

$a<-4\sqrt{2}$ のとき極大値 $4\sqrt{2}-a$　　極小値 $-4\sqrt{2}-a\,,0$

５．$a<1$（ただし、$a\neq-1$），$a>\frac{13}{5}$

６．$p=-1\,,q=0\,,r=3$

７．最大値　4　　最小値　$a<\frac{2}{3}$ のとき $3a-4$　$a\geqq\frac{2}{3}$ のとき $4-3a$

８．(1) $a\leqq\frac{1}{3}$ のとき $-3a+2$　$a>\frac{1}{3}$ のとき 1

(2) $a\leqq0$ のとき $-3a+2$　$a\geqq1$ のとき $3a-2$

$0<a<1$ のとき $f(0)$ と $f(1)$ のうちの小さくない方

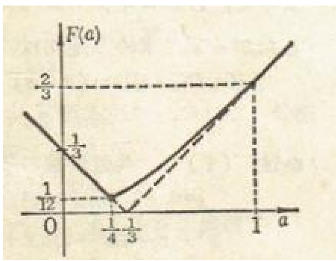
(3)

９．(1) $t^n-(n-2)t^{\frac{n}{n-2}}$ (2) $3-n$

10．(1) $a=2$　(2) $M=1$

11．最大値 18　　最小値 -2

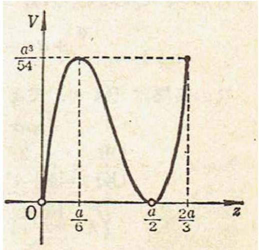
12．(1)右図



(2) $a=\frac{1}{4}$ のとき $\frac{1}{12}$

13．$\frac{18\sqrt{5}-\sqrt{30}}{45}$

14. (1) $V=\frac{1}{4}(a^2z-4az^2+4z^3)$　　$0<z<\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}<z\leqq\frac{2}{3}a$



(2) 右図

(3) $\frac{a^3}{54}$　　(4) $1:1:4$

15. (1) $\sqrt{x^2+1}\sqrt{2x-x^2}$　　(2) $f(x)=(x^2+1)(2x-x^2)$（$0\leqq x\leqq 2$）とおくと

$f'(x)=-2(2x^3-3x^2+x-1)$。ここで$g(x)=2x^3-3x^2+x-1$とおくと

16. $\frac{a^2}{2(1+a^2)}$

17. $\frac{2}{9}$

18. (1) $y=(3a^2-1)x-2a^3$　　(2) $1:2:1$

19. (1) $\pm1,\ 3,\ \frac{3\pm2\sqrt{3}}{3}$　　(2) $3<a<\frac{13}{4}$

20. $a\geqq\frac{3}{2}$

21. (1) $X=-a,\ Y=-ab+1$　　(2) $b=-2a-3,\ D=[-2,0]$

(3) $Y=2X^2-3X+1$（$0\leqq X\leqq 2$）

22.

23. $\gamma=-1,\ a=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

24. (1) 4　　(2) $pS\leqq a\leqq pL,\ qS\leqq b\leqq qL,\ rS\leqq c\leqq rL$であるから、辺々加えて

$S(p+q+r)\leqq a+b+c\leqq L(p+q+r)$

25. $a\leqq\max(a,c),\ b\leqq\max(b,c)$より$a+b\leqq\max(a,c)+\max(b,c)$,

また$c\leqq\max(a,c)$, $b,c>0$より$\max(b,c)>0$。

よって$c<\max(a,c)+\max(b,c)$

以上より$\max(a+b,c)\leqq\max(a,c)+\max(b,c)$

26. 与式$=\frac{1}{2}\left\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right\}>0$

$$\frac{b^4-a^4}{b-a}-\frac{c^4-b^4}{c-b}=(b^3+b^2a+ba^2+a^3)-(c^3+c^2b+cb^2+b^3)$$

$$=(a^3-c^3)+(a^2-c^2)b+(a-c)b^2=(a-c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)<0$$

27. (1) $3abc \geqq 4(a+b+c)$ (2) $a<c<d<b$ または $a=c<d=b$

28. (1) $(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}<(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ (2) $(x^3+y^3+z^3)^{\frac{1}{3}}<(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$

29. $a>0$ かつ $(b\pm1)^2<4ac$

30. (1) $a>\frac{4}{3}$ の場合：$-\frac{a}{2}<x<a-2$ $a=\frac{4}{3}$ の場合：解なし

$a<\frac{4}{3}$ の場合：$a-2<x<-\frac{a}{2}$

(2) $a \leqq -2$, $a \geqq 3$

31. (1) $x=y=z=3n$ とすれば、左辺 $=\frac{3n}{9n^2+1}<\frac{3n}{9n^2}=\frac{1}{3n}<\frac{1}{n}$

(2) $x=2n$, $y=\frac{1}{2n}$, $z>0$ とすれば、

$\frac{x}{xy+1}=n$, $\frac{y}{az+1}>0$, $\frac{z}{zx+1}>0$ より

$\frac{x}{xy+1}+\frac{y}{yz+1}+\frac{z}{zx+1}>n$