スタンダード演習

積分法

1． $f(x)=x(a-x)$ で、$\int_0^a f(x)dx=1$ をみたすとき、次の値を求めよ。

(1) a

(2) $A=\int_0^a xf(x)dx$

(3) $R=\int_0^a (x-A)^2 f(x)dx$

（成蹊大）

2． (1) 次の３条件を満足する２次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\int_0^2 f(x)\,dx=1\ ,\ \int_0^2 xf(x)\,dx=1\ ,\ \int_0^2 x^2 f(x)\,dx=2$$

(2) $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ とおくとき、(1) で求めた $f(x)$ に対して次の不等式が成り立つための実数 α,β,γ の条件を求めよ。

$$\int_0^2 g(x)f(x)\,dx \geqq g(1)$$

（金沢大）

3． x の３次式 $f(x)$ において

$f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_{-1}^1 xf(x)\,dx=0$, $\int_{-1}^1 (3x^2-1)f(x)\,dx=0$ である。$f(x)$ を求めよ。

（中央大）

4． ３次の整式 $f(x)$ と１次の整式 $g(x)$ がある。$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは３点で交わり、その x 座標は、$0,2,a$ である。さらに $\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 g(x)\,dx$ であるとき、a の値を求めよ。

（宮崎医大）

5． $f(x)=x^3-x^2-2x$, $g(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$ とすれば、関数 $g(x)$ は $x=$［　　］において極大値［　　］をとり、$x=$［　　］において極小値［　　］をとる。

（東京大）

6． p , q を任意の実数とし、$I_1=\displaystyle\int_0^1 (x^2+px+q)^2\,dx$, $I_2=\left\{\displaystyle\int_0^1 (x^2+px+q)\,dx\right\}^2$ とおくとき、

(1)　$I_1>I_2$ であることを証明せよ。

(2)　I_1-I_2 の最小値を求めよ。

（中部工大）

7． 1次関数 $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$ について、定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2}\{pf(x)+qf'(x)\}f(x)\,dx$ が任意の a , b に対して正であるとする。このとき、 p , q の関係を図示せよ。

（熊本大）

8． 2次関数 $f(x)$ のグラフが2点 $P(p,1)$, $Q(q,1)$ を通っている。ただし、 $p<q$ である。このとき、$\displaystyle\int_p^q f(x)\,dx=(q-p)f(r)$ となる r を p , q で表せ。

（東北大）

9． $f(x,y)=\displaystyle\int_0^2 (tx+y)^2\,dt$ について

(1)　$f(x,y)$ を求めよ。

(2)　曲線 $f(x,y)=1$ の上の動点を (x,y) とおくとき、原点からこの点までの距離の平方 x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ。

（埼玉大）

10． a を実定数とするとき、関数 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax-2a^2$ について、つぎの問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が負でない極小値をとるための a の値の範囲（この範囲をⅠとおく）を求めよ。

(2)　Ⅰに属する a に対して、$f(x)$ の極大値が最大値となるときの a の値を求めよ。また、そのときの $f(x)$ の値を求めよ。

(3)　Ⅰに属するすべての a に対して、$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx>K$ をみたす K の値の最大値を求めよ。

（宮崎大）

11. $f(0)=0$, $f(1)=1$ をみたす 2 次関数 $f(x)$ のうちで、$\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$ を最小にするものを求めよ。

（神戸商大）

12. $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ において、$f(1)=f(-1)=0$ で、$I=\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx$ が最小となるようにするには a , b , c をどのように定めればよいか。また、そのときの I を求めよ。

（名古屋大）

13. 2 つの曲線 $y=x^3$, $y=ax^2+bx+c$ が点 $O(0,0)$, $A(1,1)$ および $P(t,t^3)$ $(0<t<1)$ で交わっているとき、$\int_0^1 (x^3-ax^2-bx-c)^2 dx$ が最小になる定数 a , b , c を求めよ。

（東京電機大）

14. $f(x)=x^2(x+1)$, $g(x)=ax^2+bx+c$ が $f(-1)=g(-1)$, $f(1)=g(1)$ 、ある $k(-1<k<1)$ に対して $f(k)=g(k)$ をみたすとき、

(1) a , b , c を k を用いて表せ。

(2) $\int_{-1}^1 |f(x)-g(x)|\,dx$ が最小となるような $g(x)$ を求めよ。

（秋田大）

15. 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_{-2}^2 |x^2-1|\,dx$ （廣島修道大）

(2) $\int_{-2}^1 |x+1|\,x\,dx$

(3) $\int_{-1}^2 |x(x^2-3)|\,dx$

（東京電機大）

16. t の関数 $f(t)=|t(1-t)|$ について、

(1) $y=f(t)$ のグラフを書け。

(2) $x \leqq t \leqq x+1$ における $f(t)$ の最大値を $F(x)$ とするとき、$Y=F(x)$ のグラフを書け。

(3) $\int_0^1 F(x)\,dx$ の値を求めよ。

（京都教育大）

17. $F(a)=\int_{-1}^{1}|x-a|(x-a)\,dx$ とするとき、$F(a)$ のグラフを書き、

$\int_{-2}^{2}F(a)\,da$ の値を求めよ。

（甲南大）

18. x の関数 $f(x)$ は $x<0$ において 0、$0\leqq x<1$ において x、$1\leqq x<2$ において $2-x$、$x\geqq 2$ において 0 に等しい。

(1) 関数 $xf(x)$ のグラフを書け。

(2) $\int_{0}^{2}xf(x)\,dx$ の値を求めよ。

（高知女大）

19. (1) 積分 $\int_{0}^{x}\left|\frac{x}{2}t-t^2\right|dt$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)=\int_{0}^{x}|t-x^2|\,dt$ について次の問いに答えよ。

① $f(x)$ を x の式で表せ。

② $y=f(x)$ のグラフを書け。

（京都府大）

20. $|x|\leqq 2$ のとき、$f(x)=4-x^2$, $|x|>2$ のとき、$f(x)=0$ とする。

$\int_{-2}^{\frac{3}{2}}x^3 f\left(\frac{1}{2}-x\right)dx$ の値を求めよ。

（札幌医大）

21. $f(x)=x^2-x\int_{0}^{2}f(x)\,dx+2\int_{0}^{1}f(x)\,dx$ をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。

（福岡工大）

22. 恒等的には 0 でない関数 $f(x)$ が $f(x)=k\int_{0}^{1}(x+t)f(t)\,dt$ なる関係をみたしているとき、次の問いに答えよ。

(1) k の値を求めよ。

(2) $f(0)=1$ となる $f(x)$ を求めよ。

（横浜国大）

23. 多項式 $f(x)$ で、等式 $f(x)f'(x)+\int_1^x f(t)\,dt=\frac{4}{9}x-\frac{4}{9}$ をみたしているものをすべて求めよ。ただし、$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す。

（京都大）

24. 2 次関数 $f(x)$ とその原始関数 $F(x)$ との間に $F(x)=xf(x)-2x^3$ の関係があり、$f(0)=-3$ である。このとき

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 方程式 $F(x)=a$ の実数解の個数を求めよ。ただし a は実数の定数とする。

（川崎医大）

25. $a\,,b$ を正の数とし、関数 $f(x)$，$g(x)$ はつぎの条件(1)，(2)をみたすものとする。

(1) $f'(x)=1\,,\int_0^a f(x)\,dx=0$

(2) $g'(x)=f(x)\,,\int_0^b g(x)\,dx=0$

このとき、与えられた a に対して、$g(0)$ が最大となる b を求めよ。

（武蔵工大）

26. つぎの関数によってきまる $f(x)$，$g(x)$ について下の問いに答えよ。
ただし、$a\neq 0\,,a\neq\pm 1$ とする。

$$f(x)=3x^2+\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\,dx-a^2\quad,\quad g(x)=4x^3+2x\int_0^a f(x)\,dx-a^3-a^2+1$$

(1) $\int_0^a f(x)\,dx$ ， $\int_0^a g(x)\,dx$ の値を a を用いて表せ。

(2) 曲線 $y=g(x)$ の点 $(\,0\,,g(0)\,)$ における接線が、曲線 $y=f(x)$ にも接するように a の値を求めよ。

（奈良教育大）

27. $x>0$ で定義された関数の列 $f_1(x)$，$f_2(x)\,,\cdots$ がある。$f_1(x)=ax+b$（$a\,,b$ は定数）であり、任意の x に対して $f_{n+1}(x)=\frac{1}{x}\int_1^{x+1} f_n(t)\,dt$ （$n=1\,,2\,,\cdots$）が成り立つとする。

(1) すべての n に対して、$f_n(x)$ は x の 1 次式になることを、数学的帰納法より証明せよ。

(2) $f_n(x)$ の具体形を求めよ。

（大阪薬科大）

28. $f_1(x)=x^2+x+1$ と $n\geqq 2$ のとき、$\int_0^x f_n(t)\,dt=x^{2n-1}\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$ をみたす多項式 $f_n(x)$ がある。$n\geqq 2$ として

(1)　$F_n(x)=\int_0^x f_n(t)\,dt$ を求めよ。

(2)　$f_n(x)$ が整数を係数とする多項式となるのは、n がどのような値のときか。

（静岡大）

29. 正の整数 n に対し $f_n(x)=x^n-x^{n-1}$ とする。

(1)　$n \geqq 3$ のとき、$f_n(x)$ の極大値、極小値を求めよ。

(2)　$a_n=\int_0^2 |f_n(x)|\,dx$　，　$b_n=\int_{-2}^0 |f_n(x)|\,dx$ を求めよ。

（東京学芸大）

30. 関数 $f(x)$ は閉区間 $[-2,2]$ で定義され、そこで連続かつ $f(x) \geqq 0$ とする。このとき積分 $I=\int_{-2}^2 \{(f(x))^2+2(x^2+2x)f(x)\}\,dx$ を最小にするような $f(x)$ を求め、I の最小値を計算せよ。

（広島大）

第７回　積分法解答

１．（1）$a=\sqrt[3]{6}$　（2）$A=\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$　（3）$B=\dfrac{3\sqrt{36}}{20}$

２．（1）$f(x)=\dfrac{15}{4}x^2-\dfrac{15}{2}x+3$　（2）$\alpha+\beta+\gamma \leqq 3$

３．$f(x)=\dfrac{5}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x$

４．$a=1$

５．順に $-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{27}, 1, -\dfrac{4}{3}$

６．（1）$I_1=\dfrac{1}{5}+\dfrac{p}{2}+\dfrac{p^2+2q}{3}+pq+q^2$ ，$I_2=\dfrac{1}{9}+\dfrac{p^2}{4}+q^2+\dfrac{p}{3}+\dfrac{2q}{3}+pq$ より

$I_1-I_2=\dfrac{1}{12}(p+1)^2+\dfrac{1}{180}>0$　（2）$\dfrac{1}{180}$

７．$-\sqrt{3}p<q<\sqrt{3}p$（図略）

８．$r=\dfrac{3(p+q)\pm\sqrt{3}(p-q)}{6}$

９．（1）$\dfrac{8}{3}x^3+4xy+2y^2$（2）最大値 $\dfrac{7+\sqrt{37}}{4}$　　最小値 $\dfrac{7-\sqrt{37}}{4}$

10.（1）$\dfrac{1}{2}\leqq a<1$　（2）$a=\dfrac{2}{3}$ 最大値 $\dfrac{4}{27}$　（3）$-\dfrac{1}{2}$

11. $f(x)=\dfrac{5}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x$

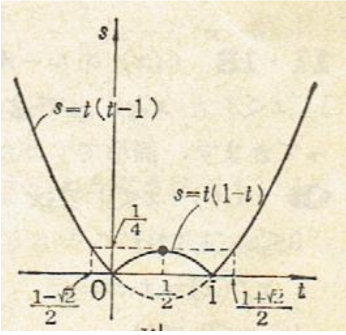
12. $a=0, b=-2, c=0$　$I=\dfrac{64}{105}$

13. $a=\dfrac{3}{2}, b=-\dfrac{1}{2}, c=0$

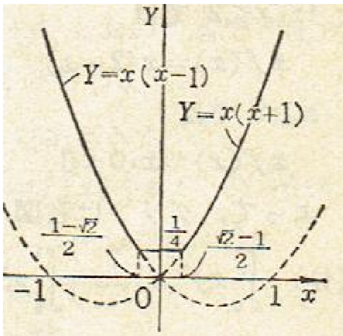
14.（1）$a=1+k, b=1, c=-k$　（2）$g(x)=x^2+x$

15.（1）4　（2）$-\dfrac{1}{6}$　（3）$\dfrac{15}{4}$

16. (1)



(2)

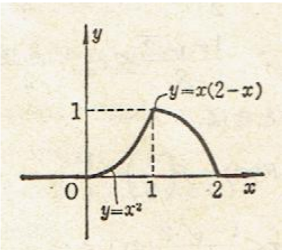


(3) $\dfrac{15+4\sqrt{2}}{24}$

17. $a \leqq -1$ のとき $2\left(a^2+\dfrac{1}{3}\right)$ $-1<a<1$ のとき $-2\left(\dfrac{1}{3}a^3+a\right)$

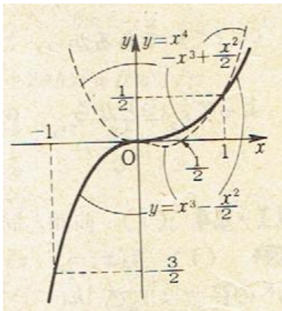
$a \geqq 1$ のとき $-2\left(a^2+\dfrac{1}{3}\right)$ $\displaystyle\int_{-2}^{2} F(a)\,da=0$

18. (1)



(2) 1

19. (1) $\dfrac{x^3}{8}$ (2) ① $x^4-x^3+\dfrac{x^2}{2}$ ②



20. $\dfrac{243}{80}$

21. $f(x)=x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$

22. (1) $k=-6\pm4\sqrt{3}$ (2) $f(x)=\pm\sqrt{3}x+1$

23. $\dfrac{4}{9},\ -\dfrac{1}{6}(x-1)^2+\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{6}(x-1)(x-5),\ -\dfrac{1}{6}(x+3)(x-1)$

24. (1) $3(x^2-1)$ (2) $|a|>2$ のとき1個 $|a|<2$ のとき3個 $|a|=2$ のとき2個

25. $\dfrac{3}{4}a$

26. (1) ともに a (2) $a=\dfrac{1}{3}$

27. (1) $f_n(x)=a_nx+b_n$ とすると $f_{n+1}(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^{x+1}(a_nt+b_n)\,dt=\dfrac{1}{2}a_nx+(a_n+b_n)$

(2) $f_n(x)=\dfrac{a}{2^{n-1}}x+b+2\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)a$

28. (1) $F_n(x)=\dfrac{1}{3}x^{n^2+2}+\dfrac{1}{2}x^{n^2+1}+x^{n^2}$ (2) n を 6 で割った余りが 1 または 5 のとき

29. (1) n が奇数の場合：極大値 0　極小値 $-\dfrac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$

n が偶数の場合：極大値なし　極小値 $-\dfrac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$

(2) $a_n=\dfrac{2^n(n-1)+2}{n(n+1)}, b_n=\dfrac{2^n(3n+1)}{n(n+1)}$

30. $f(x)=\begin{cases}-(x^2+2x) & (-2\leqq x\leqq 0)\\ 0 & (0<x\leqq 2)\end{cases}$　I の最小値は $-\dfrac{16}{15}$