スタンダード演習

数列

1．等差数列 a_1 , a_2 , a_3 , $\cdots$ において $a_1{}^2 - a_2{}^2 + a_3{}^2 - a_4{}^2 + \cdots + a_{2n-1}{}^2 - a_{2n}{}^2$ を n , a_1 , a_{2n} で表せ。

（東邦大）

2．2 つの等差数列の第 n 項までの和の比が $(pn+q):(p'n+q')$ であるとする。このとき、2 つの数列の第 n 項の比を n , p , p' , q , q' で表せ。ただし、 $pq'-p'q \neq 0$ とする。

（岡山大）

3．(1) ある整数 p を第1番目として、第 n 番目までの続いた n 個の整数の和を S_p とする。S_p を p と n で表せ。

(2) ある整数 q を第1番目として、第 n 番目までの続いた n 個の各整数 r に対応する S_r の和を S とする。S を q と n で表し、S は n^2 で割り切れることを示せ。

（愛知工大）

4． $a_1 = 0$ の数列 $\{a_n\}$ （$n=1, 2, 3, \cdots$）において、隣接する 2 項の差 $b_n = a_{n+1} - a_n$ （$n=1, 2, 3, \cdots$）で作られた数列 $\{b_n\}$ が初項 a 、公差 d の等差数列をなす。数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n 、および部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

（中央大）

5．(1) 次の数列の初めの第 n 項の和を求めよ。

$1\cdot3\cdot5, 2\cdot5\cdot9, 3\cdot7\cdot13, 4\cdot9\cdot17, \cdots$

(2) 数列 $\dfrac{1}{1\cdot3\cdot5}, \dfrac{1}{3\cdot5\cdot7}, \dfrac{1}{5\cdot7\cdot9}, \cdots$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。。

（日本大・福岡大）

6．数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。
関係式 $S_{n+1} = 4a_n + 2$ （$n=1, 2, 3, \cdots$）が成り立つとき、 $a_1 = 1$ として、次の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} , a_n , a_{n-1} （$n \geqq 2$）の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) $a_{n+1}-2a_n$ を求めよ。

(3) a_n を求めよ。

（九州工大）

7．関係式 $a_1=1$, $a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n} a_k+(n+1)$ （$n=1,2,3,\cdots$）で定められた数列について、

(1) a_{n+1} を a_n の式で表せ。

(2) a_n を n の式で表せ。また、$\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n の式で表せ。

（島根大）

8．数列 $\{a_n\}$ において、$a_1=1$, 初項から第 n 項までの和を S_n とすれば、すべての自然数 n に対して、$S_n=n^2a_n$ という関係がある。

(1) a_n と a_{n-1} との間の関係式を求めよ。

(2) a_n を n の式で表せ。

（徳島文理大）

9．数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$S_1=1$, $S_n=\dfrac{n^2}{n^2-1}S_{n-1}$ （$n\geqq 2$）をみたすとき、a_n を n を用いて表せ。

（宮崎大）

10. $1-\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{3}{4}$, $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)=\dfrac{4}{6}$, $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)=\dfrac{5}{8}$ である。これから、n を 2 以上の自然数とするとき、$\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ を推測し、つぎのその推測が正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

（広島修道大）

11. $a_0=1$, $a_n=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$ （$n=1,2,3,\cdots$）によって定められる数列について

(1) a_2, a_3, a_4 をそれぞれ求めよ。

(2) (1) で求めた結果から予想して a_n を n の式で表せ。

(3) (2) で予想した結果が正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。

（岡山理科大）

12. $S_n=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!$ とするとき、

(1) S_1, S_2, S_3 を求めよ。

(2) S_n+1 の値を推定し、それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

（京都薬科大）

13. $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2(n+1)a_n+1}$（$n\geqq 1$）で定められる数列$\{a_n\}$において、$a_2$，$a_3$，$a_4$，$a_5$の値を求めよ。また、これより一般項$a_n$の形を推定し、数学的帰納法によってこれを確かめよ。

（近畿大）

14. Nを2以上の整数とする。N個の実数$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_N$が条件

① $a_{n+1}-a_n=a_1+a_1a_na_{n+1}$（$1\leqq n\leqq N-1$）

② $a_N=0$

(1) $a_1a_n\neq 1$（$1\leqq n\leqq N$）であることを示せ。

(2) $a_n+a_{N-n}=0$（$1\leqq n\leqq N-1$）を数学的帰納法によって証明せよ。

（大阪市大）

15. (1) $x_1=1$，$x_{n+1}=1+\dfrac{1}{3}x_n$（$n=1, 2, 3, \cdots$）で定まる数列$x_1, x_2, x_3, \cdots$の$x_n$を$n$の式で表せ。

(2) nを自然数とするとき、数列$\{a_n\}$が$a_{n+1}=p\cdot a_n+q$をみたすという。第n項a_nをpおよびqで表せ。ただし、$a_1=q$（$q\neq 0$），$p\neq 1$とする。

（岩手医科大・大阪電通大）

16. 無限数列$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$が$3a_n-4a_{n-1}+a_{n-2}=0$という関係式をみたすとする。このとき

(1) a_n-a_{n-1}（$n\geqq 3$）をa_2-a_1，nで表せ。

(2) a_n（$n\geqq 3$）をa_1, a_2, nで表せ。

（九州大）

17. 数列$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$が$n\geqq 3$に対して$a_n=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})$をみたすものとする。このとき

(3) $a_1=0$，$a_2=1$のとき、a_nを求めよ。

(4) $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$がすべて整数ならば$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n=\cdots$であることを証明せよ。

（東京女大）

18. 数列$a_1, a_2, a_3, \cdots$において$a_{n+1}=\dfrac{n(n+1)}{2n-a_n}$（$n=1, 2, 3, \cdots$）であるとき

(1) a_2，a_3およびa_4をa_1の式で表せ。

(2) a_nをa_1の式で表せ。

（茨城大）

19. c を $0 \leqq c \leqq 1$ なる定数とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2}(c - a_n{}^2)$

（$n = 1, 2, 3, \cdots$）で定めるとき、すべての n に対して $0 \leqq a_n \leqq \sqrt{c}$ が成り立つことを証明せよ。

（九州大）

20. 正の数列 a_n （$n = 1, 2, 3, \cdots$）が $a_n{}^3 + 3a_n{}^2 - \left(9 + \dfrac{1}{n}\right)a_n + 5 < 0$ をみたしているとき、$(a_n - 1)^2 < \dfrac{1}{4n}$ を証明せよ。

（京都大）

21. $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{1 - a_n}$ （$n = 1, 2, 3, \cdots$）で定義される数列がある。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 平面上の点 P_n の座標を（a_n, a_{n+1}）とする。そのとき $\cos(\angle P_n P_{n+1} P_{n+2})$ を求めよ。

ただし、$\angle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ はベクトル $\overrightarrow{P_{n+1}P_n}$, $\overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}}$ のなす角とする。

（福岡大）

22. (1) $x_1 = a$（実数）, $x_{n+1} = \dfrac{1}{1 - x_n}$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）で定義された数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ がある。この項のうち、相異なるものはいくつあるか。a を用いてそれらを表せ。

(2) (1) で求めた解のうちの 2 個が整数となる a の値を求めよ。

（東北大）

23. 111556, 11115556 などのように 1 を n 個、5 を $n-1$ 個、6 を 1 個この順に並べた $2n$ 桁の整数を y_n で表し、$11\cdots1$ と 1 を n 個並べた n 桁の整数を x_n とする。$n \geqq 2$ のとき 10^n および y_n を x_n の整式で表せ。また、$\sqrt{y_n}$ はどのような数か。

（慈恵医大）

24. 下の表で横の各行は連続したn個の整数を小さい方から順に並べたものである。

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n \\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots,\ n+2 \\ 5,\ 6,\ 7,\ \cdots\cdots,\ n+4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2n-1,\ 2n,\ 2n+1,\ \cdots\cdots\cdots,\ 3n-2 \end{array}$$

(1) 上の表の全部の数の和が1450となるのは$n=$[　　]のときである。

(2) 上の表の全部の数の和が2000より大きくなるようなnの最小値は[　　]である。

（慶応大）

25. 正の偶数全体が下図のように配列されている。左からm列目、下からn行目の数を$N(m,n)$と表すことにする。例えば、$N(3,2)=16$である。このとき

$$\begin{array}{lllllll} \cdot & & & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ 20 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 12 & 18 & 26 & \cdot & \cdot & & \\ 6 & 10 & 16 & 24 & \cdot & \cdot & \\ 2 & 4 & 8 & 14 & 22 & \cdot & \cdot \end{array}$$

(1) $N(m,n)$をmとnで表せ。

(2) $N(m,n)=400$をみたすm, nを求めよ。

（福井大）

26. 1と2をいくつかずつ加えて和が4となるようにするには、加える順序を考慮すれば$1+1+1+1$, $2+1+1$, $1+2+1$, $1+1+2$, $2+2$の5通りの方法がある。一般に1と2をいくつかずつ加えて和がn（1以上の自然数）になるようにする方法の数をa_nとする。ただし、加える順序を考慮する。したがって、$a_4=5$である。このとき

(1) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$（$n=1,2,3,\cdots$）が成立することを証明せよ。

(2) $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$（$n=1,2,3,\cdots$）となるように定数$\alpha$, βを求めよ。

(3) a_nをα, β, nを用いて表せ。

（聖マリアンナ医科大）

27. 0, 1, 2, 3の4種類の数字を用いてn桁（$n\geqq 1$）の正の整数をつくるとき、数字1を偶数回含むものがa_n個、奇数回含むものがb_n個できたとする。ただし、1を含まないものも1を偶数回含むものとみなす。

(1) a_nとb_nの間にどんな関係があるか。

(2)　a_n, b_n を a_{n-1} と b_{n-1} を用いて表せ。

(3)　a_n を求めよ。

（関西学院大）

28.　3種類の細胞Ａ, Ｂ, Ｃがある。各細胞は1分ごとに分裂して1個のＡはＡ, Ｂ, Ｃ1個ずつに、1個のＢはＡ, Ｃ1個ずつに、1個のＣはＡ, Ｂ1個ずつになるものとする。また、はじめにＡ, Ｂ, Ｃはそれぞれ1個ずつあるものとする。

(1)　n 分後のＡ, Ｂ, Ｃの個数をそれぞれ a_n, b_n, c_n とするとき、a_n, b_n, c_n のおのおのを a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1} を用いて表せ（$n \geqq 1$）。

(2)　n 分後の全細胞の個数を S_n とするとき、S_n を S_{n-1}, S_{n-2} を用いて表せ（$n \geqq 2$）。

（津田塾大）

29.　正の整数 n に対して、$n < x < n+1$ で $3^x + \dfrac{1}{3}$ を整数とするような x の値の個数を a_n とするとき、次の問いに答えよ。

(1)　a_n を n を用いて表せ。

(2)　$S_n = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{2}{a_2} + \dfrac{3}{a_3} + \cdots + \dfrac{n}{a_n}$ を求めよ。

（日本大）

30.　n は負でない整数とする。$n < x < n+2$ をみたし、$f(x) = 5x(x-1)(x-2)+1$ の値が奇数となるような実数 x の個数を a_n とする。

(1)　a_0 を求めよ。

(2)　a_1 を求めよ。

(3)　a_n（$n \geqq 2$）を求めよ。

（岡山大）

31.　変数 x の整式 $P_n(x)$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）を漸化式

$$P_1(x) = 1,\ P_{n+1}(x) = p_n(x)\{1 + 3xP_n(x)\}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定義する。次のものを n を用いて表せ。

(1)　$P_n(x)$ の1次の項の係数

(2)　$P_n(x)$ の次数

（津田塾大）

国公立２次対策

第９回　数列

１．$\dfrac{n(a_1{}^2-a_{2n}{}^2)}{2n-1}$

２．$a_n : a_n' = \{p(2n-1)+q\} : \{p'(2n-1)+q'\}$

３．(1) $\dfrac{n}{2}(2p+n-1)$　　(2) $S=n^2(q+n-1)$ 、S は n^2 の倍数

４．$a_n=(n-1)a+\dfrac{1}{2}(n-1)(n-2)d$　　$S_n=\dfrac{1}{2}n(n-1)a+\dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)d$

５．(1) $\dfrac{1}{2}n(n+1)(2n+1)(2n+3)$　　(2) $\dfrac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$

６．(1) $a_{n+1}-4a_n+4a_{n-1}=0$　　(2) $a_{n+1}-2a_n=3\cdot 2^{n-1}$　　(3) $a_n=(3n-1)\cdot 2^{n-2}$

７．(1) $a_{n+1}=2a_n+1$　(2) $a_n=2^n-1$　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=2^{n+1}-(n+2)$

８．(1) $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$　(2) $a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}$

９．$a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}$

10. $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$　　数学的帰納法で証明

11. (1) $a_2=2\,,a_3=4\,,a_4=8$　　(2) $a_n=2^{n-1}$　(3) 数学的帰納法より

12. (1) $S_1=1\,,S_2=5\,,S_3=23$　　(2) $S_n+1=(n+1)!$

13. $a_2=\dfrac{1}{6}\,,a_3=\dfrac{1}{12}\,,a_4=\dfrac{1}{20}\,,a_5=\dfrac{1}{30}$　　$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$

14. (1) 背離法より $a_1a_n=1$ とすると、$a_1{}^2=-1$ となり矛盾

(2) **(ii)** (i)で証明した $a_1a_n\neq1$ と(1)から，

$$a_{n+1}=\frac{a_1+a_n}{1-a_1a_n}\quad(1\leqq n\leqq N-1)\ \cdots\cdots①$$

ここで $n=N-1$ とおくと，条件(2)の $a_N=0$ とから

$$a_1+a_{N-1}=0$$

つぎに，$a_k+a_{N-k}=0$ が正しいとすると，①とから

$$a_{k+1}=\frac{a_1+a_k}{1-a_1a_k}=\frac{a_1-a_{N-k}}{1+a_1a_{N-k}}\ \cdots\cdots②$$

ところが，①で $n=N-(k+1)$ とおくと

$$a_{N-k}=\frac{a_1+a_{N-(k+1)}}{1-a_1a_{N-(k+1)}}$$

これを②の分母・分子に代入して整理すると

$$a_{k+1}=\frac{a_1-\dfrac{a_1+a_{N-(k+1)}}{1-a_1a_{N-(k+1)}}}{1+a_1\cdot\dfrac{a_1+a_{N-(k+1)}}{1-a_1a_{N-(k+1)}}}$$

$$=\frac{a_1(1-a_1a_{N-(k+1)})-(a_1+a_{N-(k+1)})}{1-a_1a_{N-(k+1)}+a_1(a_1+a_{N-(k+1)})}$$

$$=\frac{-(a_1^2+1)a_{N-(k+1)}}{1+a_1^2}=-a_{N-(k+1)}$$

$$\therefore\quad a_{k+1}+a_{N-(k+1)}=0$$

よって，数学的帰納法により，等式

$$a_n+a_{N-n}=0\quad(1\leqq n\leqq N-1)$$

は成立する．

15. (1) $x_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2\cdot3^{n-1}}$ (2) $a_n=\dfrac{1-p^n}{1-p}q$

16. (1) $a_n-a_{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$ (2) $a_n=\dfrac{3a_2-a_1}{2}-\dfrac{a_2-a_1}{2\cdot3^{n-2}}$

17. (1) $a_n=\dfrac{1}{3}\left\{2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$ (2) 略

18. (1) $a_2=\dfrac{2}{2-a_1}$，$a_3=\dfrac{3(2-a_1)}{3-2a_1}$，$a_4=\dfrac{4(3-2a_1)}{4-3a_1}$ (2) $a_n=\dfrac{n\{(n-1)-(n-2)a_1\}}{n-(n-1)a_1}$

19. **1・19** 数列の不等式は，考えにくい部類にはいります．数学的帰納法は有力な武器の１つです．

解 不等式 $0\leqq a_n\leqq\sqrt{c}$ は $n=1$ のとき成立する．

つぎに，$0\leqq a_k\leqq\sqrt{c}$ が成り立つとすると，まず

$$c-a_k^2\geqq0\qquad\therefore\ a_{k+1}\geqq a_k\qquad\therefore\ a_{k+1}\geqq0$$

また，$c\leqq1$ とから

$$0\leqq1-\sqrt{c}\leqq1-a_k\qquad\therefore\ (1-a_k)^2\geqq(1-\sqrt{c})^2$$

$$\therefore\ \sqrt{c}-a_{k+1}=\sqrt{c}-\left\{a_k+\frac{1}{2}(c-a_k^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(1-a_k)^2-\frac{1}{2}(1-\sqrt{c})^2\geqq0$$

$$\therefore\ a_{k+1}\leqq\sqrt{c}$$

よって，数学的帰納法により，すべての n に対して，不等式 $0\leqq a_n\leqq\sqrt{c}$ が成り立つ．

20. **1・20** $a_n^3+3a_n^2-9a_n+5=(a_n-1)^2(a_n+5)$ が見抜けないと，ちょっと扱いにくいでしょう．

解 条件の不等式は，つぎのように変形できる．

$$(a_n-1)^2<\frac{1}{n}\cdot\frac{a_n}{a_n+5}\ \cdots\cdots①$$

よって，結論の不等式を証明するには

$$\frac{a_n}{a_n+5}\leqq\frac{1}{4}\qquad\therefore\ a_n\leqq\frac{5}{3}$$

を示せばよい．ところが，条件式と $a_n>0$ とから

$$a_n^3+3a_n^2-10a_n+5<0$$

$$\therefore\ 3\left(a_n-\frac{5}{3}\right)^2<\frac{10}{3}-a_n^3$$

$$\therefore\ 0<a_n^3<\frac{10}{3}<\left(\frac{5}{3}\right)^3\qquad\therefore\ a_n<\frac{5}{3}$$

よって，結論の不等式はつねに成立する．

21. (1) $a_{3k+1}=\frac{1}{2}$, $a_{3k+2}=2$, $a_{3k+3}=-1$ (2) $n=3k+1\to\frac{4}{5}$, その他の場合 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

22. (1) a, $\frac{1}{1-a}$, $1-\frac{1}{a}$ (2) 2, $\frac{1}{2}$, -1

23. $\sqrt{y_n}$ は、33⋯34 の形の n 桁の整数

24. (1) $n=10$ (2) $n=12$

25. (1) $(m+n-2)(m+n-1)+2n$ (2) $m=11$, $n=10$

26. (1) 略 (2) $\alpha=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$ (3) $a_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$

27. (1) $a_n+b_n=3\cdot 4^{n-1}$ (2) $a_n=\frac{1}{2}(3\cdot 4^{n-1}+2^{n-1})$

28. (1) $a_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}$, $b_n=a_{n-1}+c_{n-1}$, $c_n=a_{n-1}+b_{n-1}$ (2) $S_n=2S_{n-1}+S_{n-2}$

29. (1) $a_n=2\cdot 3^n$ (2) $S_n=\frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{4\cdot 3^n}$

30. (1) $a_0=1$ (2) $a_1=15$ (3) $a_n=15n^2-1$

31. (1) $a_n=3(n-1)$ (2) $b_n=2^{n-1}-1$