スタンダード演習

確率

１．7 個の文字Ａ, Ｂ, Ｃ, Ｄ, Ｅ, Ｆ, Ｇを一列に並べる順列を考える。このとき、

⑴ すべての陣列を辞書のアルファベット順の方式で配列するとき、第 1234 番目にある順列を求めよ。

⑵ ＡとＣがいずれも端になく、ともにＧと隣り合う順列は全部で何通りあるか。

（九州大）

２．a が 10 個、b が 4 個、c が 3 個、合計 17 個の文字を横に一列に並べたい。ただし、左端が a、右端が c で、b と b、b と c、c と c はそれぞれ隣り合わないものとする。このとき並べ方は何通りあるか。

（岡山大）

３．赤球 3 個、青球 3 個、白球 2 個の中から 5 個の球を取り出して一列に並べる。次の並べ方はそれぞれ何通りあるか。

⑴ 同色の球が隣り合わない並べ方。

⑵ どの色の球も少なくとも 1 個はいっている並べ方。

（大分大）

４．⑴ 4 けたの電話番号のうち、数字が増す順に並んでいるものは全部で何通りあるか。

⑵ ⑴の条件をゆるめて、同じ数字が 2 つまでは並んでもよい（しかし異なる数字同士は小さいものから大きいものへと順に並んでいる。）とすると、そのような電話番号は全部で何通りあるか。

（中央大）

５．ＴＯＫＹＯＲＩＫＡＤＡＩの 12 文字がある。

⑴ 母音は母音と、子音は子音と入れかえるものとして、この 12 文字を並べるとき、いく通り相異なるものができるか。

⑵ この 12 文字より 4 文字とってつくる組合せは何通りあるか。

⑶ この 12 文字より 4 文字とって並べる方法はいく通りあるか。

（東京理科大）

６．相異なる 4 個の球すべてを、相異なる 5 つの袋に入れるとき、次の問いに答えよ。

⑴ 球の入れ方は全部で何通りあるか。

⑵ 球が 1 個も入っていない袋が 1 つであるような入れ方は何通りか。

⑶ 球が 1 個も入っていない袋が 2 つであるような入れ方は何通りか。

（宮崎医大）

７．Ａ，Ｂ，Ｃの3室に、a, b, c, d, eの5人を空室がないようにいれるには何通りの方法があるか。ただし、各室とも3人までは入れるものとする。

（東京電機大）

８．それぞれ9名よりなる男女混成の2つのチームＡ，Ｂがある。Ａチームには女性が2名、Ｂチームには3名いる。この両チームのメンバー18名の中から9名を選び出して、次の2つの条件をみたすように新たに1つのチームを編成したい。

(a) 女性は2名までとする。

(b) Ａチームからは少なくとも7名を入れる。

何通りの編成の仕方があるか。

（広島大）

９．ある高校の文化サークルは全員12人の生徒よりなり、そのうち、男子は8人、3年生は6人である。この12人から代表4人を男子が2人、3年生が2人となるように選ぶ仕方の数が76であった。このとき12人中3年生の女子は何人か。

（名古屋工大）

10. ある凸12角形でどの3つも対角線も同一の点を通ることはないものとする。

(1) 対角線は全部で何本引けるか。

(2) それらの対角線は、対角線の交点によっていくつかの線分に分割される。それらの線分は全部でいくつあるか。

（奈良県立医大）

11. 1から10までの数字を1つずつ書いた枚のカードがある。その中から5枚を手当たり次第に抜き出す。それらのカードを数字の小さいものから大きなものへ、順に並べたときに、初めから数えて奇数番目のどれかのカードに7の出る確率を求めよ。

（弘前大）

12. サイズの異なる4足の靴8個から任意に4個とるとき、ちょうど1足だけ揃ったものが得られる確率を求めよ。

（東京電機大）

13. トランプのハートの1から5までのカード5枚を入れた袋がある。これから任意に1枚ずつ取り出し、横に1列に並べる。左からn番目におかれるカードの数字を$x_n\,(n=1, 2, 3, 4, 5)$とするとき、

(1) $x_1 \neq 1, x_2 = 2, x_3 \neq 3, x_4 = 4, x_5 \neq 5$となる確率はいくらか。

(2) 少なくとも2つのnに対して、$x_n = n$となる確率はいくらか。

（日本女大）

14. 白球 9 個、赤球 3 個計 12 個の球の入った袋がある。いま、この袋から 1 個ずつ順に 3 回球を取り出したとき（取り出した球はもとにもどさないものとする）、3 回目に取り出した球が白である確率は［　　］である。また、3 回目に取り出した球が白であるときに 1 回目に取り出した球も白であった確率は［　　］である。

（浜松医大）

15. 5 回に 1 回の割合で帽子を忘れる癖のあるＫ君が、正月にＡ，Ｂ，Ｃ3 軒を順に年始まわりをして家に帰ったとき、帽子を忘れてきたことに気がついた。2 番目の家Ｂに忘れてきた確率を求めよ。

（早稲田大）

16.　Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，…，Ｉ，Ｊの 10 文字をでたらめに左右 1 列に並べるとき、次の確率を求めよ。

(1)　ＡがＢの左にある。（隣り合っていなくてもよい。以下同様）

(2)　ＡがＢの左にあり、かつＣがＤの左にある。

(3)　ＡがＢの左にあり、かつＢがＣの左にある。

(4)　ＡがＢの左にあり、かつＡがＣの左にある。

(5)　ＡがＢの左にあるか、またはＣがＤの左にある。

(6)　ＡがＢの左にあるか、またはＢがＣの左にある。

(7)　ＡがＢの左にあるか、またはＡとＢとの間にＣがある。

(8)　ＡがＢの左にあるとき、ＡがＣの左にある。

（関西大）

17.　n（$n \geqq 2$）個の正しい硬貨を同時に投げるとき、”少なくとも $n-1$ 個裏が出る”という事象を A、”少なくとも1個表が出るが全部表ではない”という事象を B とすると、確率 $P(A)=$［ ア ］，$P(B)=$［ イ ］，$P(A \cap B)=$［ ウ ］である。

　また、事象 A と B の独立性、従属性を考察すると、ただ1つの自然数 $n=$［ エ ］に対してのみ、A と B とは［ オ ］であって、その他の n お値に対しては、A と B とは［ カ ］である。

（慶応大）

18.　m 個のサイコロを同時に振る。このようなことを n 回繰り返すとき、

(1) 毎回、少なくとも 1 個のサイコロに 1 の目が出る確率を求めよ。

(2) 少なくとも 1 回、すべてのサイコロに 1 の目が出る確率を求めよ。

（九州大）

19.　ある地点で 1 日のうちに雨が降る確率は、前日に雨が降った場合は p、降らなかった場合は $1-p$ であるという。この地点で、雨が降らなかった日に続く 3 日間のうち、1 日だけ雨が降る確率を Q とする。

(1) Q を p を用いて表せ。

(2) Q を最大にする p と、Q の最大値を求めよ。

（大阪市大）

20. (1) かたよりのないサイコロをくり返し n 回投げるとき、少なくとも1回1の目の出る確率が 95%以上になるような n の最小値 n_0 を求めよ。
ただし、$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(2) このサイコロを(1)で求めた n_0 回だけ投げるとき、1の目がちょうど k 回出る確率を P_k とする。P_k が最大となるのは、k がどのような値のときか。

（千葉大）

21. Ａ，Ａ，Ａ，Ａ，Ｍ，Ｓ，Ｔ，Ｕの８文字が８枚のカードに1つずつ書いてある。この中から1枚ずつ順に５枚取り出して左から1列に並べる。この試行を1000回繰り返すとき、ＡＳＡＭＡという語は何回現れることが最も起こりやすいか。

（金沢大）

22. Ａ，Ｂ，Ｃの３人が、じゃんけんで順位を定める。各人の石、鋏、紙を出す確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ で、３人のそれらの出し方は独立であるとする。ただし、順位を決定するには、まず3人いっしょにじゃんけんをし、1人が勝ったときは負けた２人がさらにじゃんけんをして２，３位を定め、また1人が負けたときは勝った２人がさらにじゃんけんをして1，２位を定める.

(1) ３人の順位が n 回目（$n \geqq 2$）のじゃんけんで決定される確率 p_n を求めよ.

(2) ３人の順位が４回以内のじゃんけんで決定される確率を求めよ.

（富山大）

23. n 人がそれぞれ1つのサイコロを同時に投げ出た目の数が最も大きい人を残す. 残った人でこのような試行を繰り返し, 最後の1人を勝者とする.

(1) 1回の試行で勝者のきまる確率 p_n を求めよ.

(2) $n = 3$ のとき、２回以内の試行で勝者がきまる確率を求めよ.

（愛媛大）

24. 試行 A_1 で事象 E_1 が起こる確率は $\dfrac{1}{3}$ 、これと独立な試行 A_2 で事象 E_2 が起こる確率は $\dfrac{1}{2}$ である。このとき、最初に試行 A_1 を1度、つぎに試行 A_2 を２度行う。事象 E_1 の起こる回数と、E_2 の起こる回数の和の期待値を求めよ。

（武蔵工大）

25. 2個のさいころを同時に振って出た目の最小値を X とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $X=2$ となる確率を求めよ。

(2) k を $1 \leqq k \leqq 6$ なる整数とするとき、 $X=k$ となる確率を求めよ。

(3) X の期待値を求めよ。

（茨城大）

26. 100円払って、さいころを1回振る。1, 2の目が出たらくじを1本、3, 4の目が出たらくじを2本、5, 6の目が出たらくじを3本引くことができる。くじには、当たりくじ1本とはずれが3本入っており、くじは1本ずつ引きそのつど引いたくじは元に戻すものとする。当たりくじのとき60円、はずれのとき30円の金を得る。

(1) 得る金額が100円をこえる確率を求めよ。

(2) 得る金額の期待値を求めよ。

（名古屋市大）

27. 赤球5個、白球3個が入っている赤箱と、赤球3個、白球5個が入っている白箱がある。

1回目は赤箱から球を1個取り出してもとにもどし、2回目は1回目に取り出された球と同じ色の箱から球を1個取り出してもとにもどす。このようにして、$k+1$ 回目は k 回目に取り出された球と同じ色の箱から球を1個取り出してもとにもどすとする。n 回目に取り出された球が赤球である確率を p_n とするとき、次の問いに答えよ。

(1) p_1, p_2, p_3 の値を求めよ。

(2) p_n を p_{n-1} で表せ。

(3) p_n を n で表せ。

（横浜国大）

28. 異なる数字を記入した3枚のカードがある。このうちから無作為に1枚を取り出し、取り出したカードの数字より大きい数字のカードを取り除き、初めに取ったカードはもとへ戻す。次に残ったカードについて同じ操作を行う。

この流れを n 回繰り返した後で、残っているカードの枚数が3枚および2枚である確率をそれぞれ a_n, b_n とし、また残っているカードの枚数の期待値を c_n とする。

(1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ。

(2) c_{n+1} を c_n で表せ。

(3) a_n, b_n を求めよ。

（横浜市大）

第 10 回　確率

１．(1)　ＢＦＣＤＥＧＡ　　(2)　144

２．1260

３．(1)　44　　(2)　130

４．(1)　210　　(2)　615

５．(1)　32400　　(2)　160　　(3)　2724

６．(1)　625　　(2)　120　　(3)　360

７．150

８．874

９．２人

10.　(1)　54　　(2)　1044

11.　$\dfrac{5}{21}$

12.　$\dfrac{24}{35}$

13.　(1)　$\dfrac{1}{60}$　　(2)　$\dfrac{31}{120}$

14.　順に $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{8}{11}$

15.　$\dfrac{20}{61}$

16.　(1)　$\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\dfrac{1}{4}$　(3)　$\dfrac{1}{6}$　　(4)　$\dfrac{1}{3}$　　(5)　$\dfrac{3}{4}$　　(6)　$\dfrac{5}{6}$　　(7)　$\dfrac{2}{3}$　　(8)　$\dfrac{2}{3}$

17.　順に $\dfrac{n+1}{2^n}$, $\dfrac{2^n-2}{2^n}$, $\dfrac{n}{2^n}$, 3, 独立, 従属

18.　(1)　$\left\{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^m\right\}^n$　　(2)　$1-\left\{1-\left(\dfrac{1}{6}\right)^m\right\}^n$

19.　(1)　$Q=p(1-p)(2-p)$　　(2)　$Q=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

20.　(1)　$n_0=17$　　(2)　$k=2,3$

21.　3 回

22. (1) $p_n = \dfrac{4(n-1)}{3^n}$ (2) $\dfrac{8}{9}$

23. (1) $p_n = \dfrac{n}{6^n}(1+2^{n-1}+3^{n-1}+4^{n-1}+5^{n-1})$ (2) $\dfrac{2485}{2592}$

24. $\dfrac{4}{3}$回

25. (1) $\dfrac{1}{4}$ (2) $\dfrac{13-2k}{36}$ (3) $\dfrac{91}{36}$

26. (1) $\dfrac{41}{192}$ (2) 75円

27. (1) $p_1 = \dfrac{5}{8}$, $p_2 = \dfrac{17}{32}$, $p_3 = \dfrac{65}{128}$ (2) $p_n = \dfrac{1}{4}p_{n-1} + \dfrac{3}{8}$ (3) $p_n = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{4^n}\right)$

28. (1) $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n$, $b_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n$ (2) $c_{n+1} = \dfrac{1}{2}c_n + \dfrac{1}{2}$

(3) $a_n = \dfrac{1}{3^n}$, $b_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} - \dfrac{2}{3^n}$