

§ 8 多変数関数の最大・最小

◆ 練習編

1. (1) $x+2y=5$ のとき、 x^2+y^2 の最小値を求めよ。
 (2) $x+y+2z=1, x-3y+4z=1$ のとき、 $x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ。
2. (1) $2x+y=8, x \geq 0, y \geq 0$ のとき、 xy の最大値と最小値を求めよ。
 (2) (1) のとき、 $x^2y^2+4x^2+y^2$ の最大値と最小値を求めよ。
3. (1) $2x^2+y^2=2$ のとき、 $2x+y^2$ の最大値と最小値を求めよ。
 (2) $x^2+y^2+2y=3$ のとき、 x^2+2y^2+6y の最大値と最小値を求めよ。
4. (1) x^2+2x+y^2-4y+1 の最小値を求めよ。
 (2) $1 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 4$ のとき、(1) の最大値と最小値を求めよ。
 (3) $x^2+2xy+2y^2+4x-2y+1$ の最小値を求めよ。
5. (1) $x > 0, y > 0, xy=4$ のとき、 $2x+y$ の最小値を求めよ。
 (2) $x > 0, y > 0, 2x+y=4$ のとき、 xy の最大値を求めよ。
 (3) 縦・横・高さの和が 12 の直方体を作るとき、体積の最大値を求めよ。
6. (1) $x^2+y^2=4$ のとき、 $2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。
 (2) $x+y=5$ のとき、 x^2+4y^2 の最小値を求めよ。
 (3) $x+2y+3z=7$ のとき、 $x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ。
7. (1) $x^2-2xy+y^2=1$ のとき、 $xy+x+y$ の最大値と最小値を求めよ。
 (2) $x+y+z=2, x^2+y^2+z^2=2$ のとき、 $x^3+y^3+z^3$ の最小値を求めよ。
 (3) 1つの頂点から出る3辺の長さが x, y, z であるような直方体において、 x, y, z の和が 6、全表面積が 18 であるとき、体積の最大値を求めよ。

(東京大)

8. $x+2y \geq 4, x-3y \geq -6, 3x+y \leq 12$ を満たすとき、次の式の最大値と最小値を求めよ。

(1) $2x+y$ (2) x^2+y^2 (3) $\frac{y-1}{x+1}$

9. (1) $x^2 + xy + y^2 = 1$ のとき、 y の最大値と最小値を求めよ。
 (2) $x^2 + xy + y^2 = 1$ のとき、 $2x + y$ の最大値と最小値を求めよ。
 (3) $x - 2y - 4z = -1$, $x^2 + y^2 - 3z^2 = 5$ のとき、 $x - y - 3z$ の最大値と最小値を求めよ。

10. (1) $x^2 + y^2 = 1$ のとき、 $x^2 + 2xy + 3y^2$ の最大値と最小値を求めよ。
 (2) $4x^2 + 9y^2 = 36$ のとき、 $2x^2 + xy + 4y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

11. (1) $4x^2 - 8xy + 10y^2 = 1$ のとき、 $x^2 + y^2$ の最大値と最小値を求めよ。
 (2) $1 \leq x \leq 2$, $2 \leq y \leq 4$ のとき、 $\frac{2xy}{4x^2 + y^2}$ の最大値を求めよ。

12. (1) $3 \leq x \leq 4$, $-2 \leq y \leq 0$ のとき、 $xy + x - 2y + 1$ の最大値と最小値を求めよ。
 (2) x, y が $x + 2y \geq 4$, $x - 3y \geq -6$, $3x + y \leq 12$ を満たすとする。このとき、 $x^2 - y^2$ の最大値と最小値を求めよ。
 (3) $0 \leq x \leq 1$, $y \leq 2$, $2 \leq z \leq 3$ が成り立つとする。このとき、 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ の最小値を求めよ。

13. $-4 \leq -x + 2y \leq 3$, $3 \leq 2x - y \leq 6$ のとき、 $x^2 - 2xy + 2y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

◆ 実践編

1. 実数 x, y が $x^2 + y^2 = 1$ であるとき、 $\sqrt{3}x^2 + 2xy - \sqrt{3}y^2$ の最大値とそのときの x, y の値を求めよ。

(1968 北海道大)

2. 実数 x, y は $x \geq 0$, $y \geq 0$ であり、 $x + 2y = 6$ をみたす。このとき、 y の値のとり得る範囲は [ア] $\leq y \leq$ [イ] であり、 $x^2 + 2y^2$ の最大値は [ウエ] である。

(2020 東海大)

3. 実数 x と y が $x^2 + xy + y^2 = 3$ を満たしながら動くとき、以下の問に答えよ。

- (1) $t = x + y$, $s = xy$ とおくとき、 t がとりうる値の範囲を求めよ。
 (2) $z = x^2 + y^2 + 2x + 2y$ とするとき、 z がとりうる値の範囲を求めよ。また、 z の最大値と最小値を与える x, y の値をそれぞれ求めよ。

(2019 西南学院大)

4. x, y が実数で、 $x^2 + y^2 = 1$ のとき、 $3x + 2y^2$ の最大値 M の値と最小値 m の値を求めよ。

(2017 北海道医療大)

5. 実数 x, y が $x^2 - 2xy + y^2 - \sqrt{3}x - \sqrt{3}y + 12 = 0$ を満たすとき、次の最小値を求めよ。

- (1) $x + y$ (2) xy (3) $x^3 + y^3$

(1977 北海道大)

6. 実数 x, y が $2x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ を満たすとき、 y のとりうる値の範囲は [ア] であり、 $z = x^2 + y$ のとりうる値の範囲は [イ] である。

(2018 南山大)

7. xy 平面において、連立不等式 $y \leq 3, y + x - 4 \geq 0, y + 2x - 8 \leq 0$ の表す領域を D とする。

(1) D を図示せよ。

(2) 点 (x, y) が D を動くとき、 $k = y + x^2 - 4x$ のとる値の最大値と最小値を求めよ。

(1988 北海道大)

8. 関数 $x + y = 1, 0 \leq x \leq 2$ のとき、 $x - 2y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

(2007 関西大)

9. 実数 x, y が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき、 $x + y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

(2004 千葉工大)

10. 実数 x, y が $x^2 + y^2 = 4$ を満たしているとき、 $4x + 2y^2$ の最大値と最小値、およびそのときの x, y の値を求めよ。

(2007 神戸学院大)

11. 実数 x, y が $x + 3y = 4$ を満たすとき、 $2x^2 + xy + y^2$ の最小値を求めよ。

(2004 近畿大)

12. 実数 x, y が $x + y = 4$ および $x \geq 0, y \geq 0$ を満たすとき、 $x^2y^2 + x^2 + y^2 + xy$ の最小値は [ア]、最大値は [イ] である。

(2005 東京工大)

13. x, y は実数とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $x^2 + 2y^2 = 1$ のとき、 $x + 4y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) $x > 0, y > 0, x^2 + y^2 = 1$ とする。 xy の最大値を求めよ。また、そのときの x, y の値も求めよ。

((1) 福島大 (2) 立命館大)

14. 実数 x, y は $8x^2 - 14x + y^2 = 39, y \geq 0$ を満たす。

- (1) x のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) y のとり得る値の範囲を求めよ。

(2018 近畿大公募推薦)

15. 実数 x, y, z が $x + y + z = 1, x + 2y + 3z = 5$ を満たすとする。

- (1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ の最小値を求めよ。
- (2) $z \geq 0$ のとき、 xyz が最大となる z の値を求めよ。

(2017 大阪大)

解答

◆ 練習編

1. (1) $(x, y) = (1, 2)$ のとき、最小値 5 (2) $(x, y, z) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ のとき、最小値 $\frac{1}{6}$
2. (1) $(x, y) = (2, 4)$ のとき、最大値 8 $(x, y) = (0, 8), (4, 0)$ のとき、最小値 0
 (2) $(x, y) = (2, 4)$ のとき、最大値 96 $(x, y) = (2 \pm \sqrt{3}, 4 \mp 2\sqrt{3})$ のとき、最小値 60
3. (1) $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ のとき、最大値 $\frac{5}{2}$ (2) $(x, y) = (-1, 0)$ のとき、最小値 -2
4. (1) $(x, y) = (-1, 2)$ のとき、最小値 -4 (2) $(x, y) = (3, -1)$ のとき、最大値 21
 $(x, y) = (1, 2)$ のとき、最小値 0 (3) $(x, y) = (-5, 3)$ のとき、最小値 -12
5. (1) $(x, y) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ のとき、最小値 $4\sqrt{2}$ (2) $(x, y) = (1, 2)$ のとき、最大値 2
 (3) 64
6. (1) $(x, y) = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ のとき、最大値 $2\sqrt{5}$
 $(x, y) = \left(\frac{-4}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ のとき、最小値 $-2\sqrt{5}$
 (2) $(x, y) = (4, 1)$ のとき、最小値 20 (3) $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$ のとき、最小値 $\frac{7}{2}$
7. (1) $(x, y) = (1, 1)$ のとき、最大値 3
 $(x, y) = \left(\frac{-9 \pm \sqrt{21}}{12}, \frac{-9 \mp \sqrt{21}}{12}\right)$ のとき、最小値 $-\frac{13}{12}$
 (2) $(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ のとき、最大値 $\frac{22}{9}$
 $(x, y, z) = (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$ のとき、最小値 2
 (3) 4
8. (1) $(x, y) = (3, 3)$ のとき、最大値 9 $(x, y) = (0, 2)$ のとき、最小値 2
 (2) 最大値 18, 最小値 $\frac{16}{5}$ (3) 最大値 1, 最小値 $-\frac{1}{5}$
9. (1) $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、最大値 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、最小値 $-\frac{2}{\sqrt{3}}$
 (2) $(x, y) = (1, 0)$ のとき、最大値 2 $(x, y) = (-1, 0)$ のとき、最小値 -2
 (3) $(x, y, z) = (-1, 4, -2)$ のとき、最大値 1
 $(x, y, z) = (7, -16, 10)$ のとき、最小値 -7

10. (1) 最大値 $2+\sqrt{2}$, 最小値 $2-\sqrt{2}$ (2) 最大値 $17+\sqrt{10}$, 最小値 $17-\sqrt{10}$

11. (1) $(x, y) = \left(\pm \frac{2}{\sqrt{10}}, \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$ のとき、最大値 $\frac{1}{2}$

$(x, y) = \left(\pm \frac{1}{2\sqrt{15}}, \mp \frac{1}{\sqrt{15}} \right)$ のとき、最小値 $\frac{1}{12}$

(2) $y = 2x$ が成り立つとき、最大値 $\frac{1}{2}$

12. (1) $(x, y) = (4, 0)$ のとき、最大値 5 $(x, y) = (4, -2)$ のとき、最小値 1

(2) $(x, y) = (4, 0)$ のとき、最大値 16 $(x, y) = \left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4} \right)$ のとき、最小値 $-\frac{9}{2}$

(3) $(x, y, z) = (0, 1, 3), (0, 2, 3)$ のとき、最大値 7

$(x, y, z) = \left(1, \frac{3}{2}, 2 \right)$ のとき、最小値 $\frac{3}{4}$

13. $(x, y) = (5, 4)$ のとき、最大値 17 $(x, y) = \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5} \right)$ のとき、最小値 $\frac{9}{5}$

◆ 実践編

1. 最大値, 最小値 $= \pm 2$, $x = \pm \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $y = \pm \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2. ア 0 イ 3 ウ 3 エ 6

3. (1) $-2 \leq t \leq 2$ (2) $-2 \leq z \leq 7$ $(x, y) = (-1, 2), (2, -1)$ のとき、最大値
 $(x, y) = (-1, -1)$ のとき、最小値

4. $(x, y) = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4} \right)$ のとき、最大値 $\frac{25}{8}$ $(x, y) = (-1, 0)$ のとき、最小値 -3

5. (1) $4\sqrt{3}$ (2) 12 (3) $48\sqrt{3}$

6. ア $-1 \leq y \leq 3$ イ $-1 \leq z \leq \frac{7}{2}$

7. (1) 略 (2)

8. $(x, y) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4} \right)$ のとき、最大値 $\frac{9}{8}$ $(x, y) = (0, 1)$ のとき、最小値 -2

9. $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ のとき、最大値 $\frac{5}{4}$ $(x, y) = (-1, 0)$ のとき、最小値 -1

10. $(x, y) = (1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3})$ のとき、最大値 10

$(x, y) = (-2, 0)$ のとき、最小値 -8

11. $(x, y) = \left(-\frac{1}{8}, \frac{11}{8}\right)$ のとき、最小値 $\frac{7}{4}$

12. ア 28 イ $\frac{63}{4}$

13. (1) 最大値 $\frac{17}{8}$ 最小値 -1 (2) $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき、最小値 $\frac{1}{2}$

14. (1) $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{13}{4}$ (2) $0 \leq y \leq \frac{19\sqrt{2}}{4}$

15. (1) $\frac{27}{4}$ (2) $z = \frac{5 + \sqrt{7}}{3}$