

§ 2 1 二項定理・多項定理

1. $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^6$ の展開式において、 x^2 の係数と定数項を求めよ。

(中京大)

2. $\left(x^2 - \frac{1}{2x^3}\right)^5$ の展開式において、定数項を求めよ。

(日本大)

3. a を実数とする。 $(1+ax)^5\left(x-\frac{2}{x}\right)^4$ の展開式における、 x^4 の係数が 41 となるような a の値を求めよ。

(秋田大)

4. 自然数 n に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$(1) {}_n C_0 + {}_n C_1 + \cdots + {}_n C_n = 2^n$$

$$(2) {}_n C_1 + 2 \cdot {}_n C_2 + \cdots + n \cdot {}_n C_n = 2^{n-1} \cdot n$$

$$(3) {}_{2n+1} C_0 + {}_{2n+1} C_1 + \cdots + {}_{2n+1} C_n = 2^{2n}$$

(大阪府立大)

5. $(1+x)^n$ を展開したとき、次数が奇数である項の係数の和を求めよ。ただし、 n は正の整数とする。

(弘前大)

6. n を正の整数とする。 $(x+3)^n$ の展開式における x^r の係数を a_r とおく。ただし、 r は整数で $0 \leq r \leq n$ とする。

(1) a_r を n と r の式として表せ。

(2) $0 \leq r \leq n-1$ とする。 $\frac{a_r}{a_{r+1}}$ を n と r の式として表せ。

(3) $n=99$ のとき、 a_r が最大となる r の値をすべて求めよ。

(中央大)

7. $(x+5)^{80}$ を展開したとき、 x の何乗の係数が最大になるか答えよ。

(弘前大)

8. n は自然数として、次の和を求めよ。

$$\frac{{}^n C_0}{1} + \frac{{}^n C_1}{2} + \cdots + \frac{{}^n C_k}{k+1} + \cdots + \frac{{}^n C_n}{n+1}$$

[注: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n {}^n C_k x^k$ の両辺の式を x の関数とみて、 $x=0$ から $x=1$ までの定積分を計算してみよ。]

(近畿大)

9. $2 \cdot 1 \cdot {}_n C_2 + 3 \cdot 2 \cdot {}_n C_3 + \cdots + k(k-1) \cdot {}_n C_k + \cdots + n(n-1) \cdot {}_n C_n$ を計算せよ。

(琉球大)

10. $\sum_{k=10}^{50} {}_{60} C_k \cdot {}_{40} C_{50-k}$ を求めよ。

(明治大)

11. p を素数とすると、次のことを証明せよ。

(1) $1 \leq k \leq p$ を満たす自然数 k について、等式 $p \cdot {}_{p-1} C_{k-1} = k \cdot {}_p C_k$ が成り立つ。

(2) $1 \leq k \leq p-1$ を満たす自然数 k について、 ${}_p C_k$ は p の倍数である。

(3) $2^p - 2$ は p の倍数である。

(東北学院大)

12. 次の各問いに答えよ。ただし、正の整数 n と整数 k ($0 \leq k \leq n$) に対して、 ${}_n C_k$ は正の整数である事実を使ってよい。

(1) m が 2 以上の整数のとき、 ${}_m C_2$ が m で割り切れるための必要十分条件を求めよ。

(2) p を 2 以上の素数とし、 k を p より小さい正の整数とする。このとき、 ${}_p C_k$ は p で割り切れることを示せ。

(3) p を 2 以上の素数とする。このとき、任意の正の整数 n に対し、 $(n+1)^p - n^p - 1$ は p で割り切れることを示せ。

(早稲田大)

13. 自然数 $m \geq 2$ に対し、 $m-1$ 個の二項係数 ${}_m C_1, {}_m C_2, \cdots, {}_m C_{m-1}$ を考え、これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1) m が素数ならば、 $d_m = m$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 k に対し、 $k^m - k$ が d_m で割り切れることを、 k に関する数学的帰納法によって示せ。

(3) m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ。

(東京大)

14. (1) 4^7 を 27 で割った余りを求めよ。
(2) 4^{31} を 27 で割った余りを求めよ。

(奈良女子大)

15. 自然数 n が 6 の倍数のとき、 3^n を 7 で割った余りは 1 であることを示せ。

(岡山県立大)

16. 自然数 m を 7 で割ったときの余りを \overline{m} で表すことにする。

- (1) 負でないすべての整数 n に対し、等式 $\overline{5^{n+6}} = \overline{5}$ が成立することを証明せよ。
(2) n が負でない整数のとき、 $\overline{5^n}$ の値を求めよ。
(3) 12192^4 を 7 で割ったときの余りを求めよ。

(釧路公立大)

17. (1) n を正の整数とする。 $(1+a)^n$ を二項定理を用いて展開せよ。

- (2) 21^{10} を 400 で割ったときの余りを求めよ。

- (3) $19^n + 21^n$ が 400 で割り切れるような正の整数 n が存在するか、存在するならば、その例を示せ。存在しなければ、それを証明せよ。

(中央大)

18. n を 2 以上の整数とする。

- (1) 2011 の n 乗を 2010 で割れば 1 余ることを示せ。

- (2) $2^{4n} - 1$ を 17 で割ったときの余りを求めよ。

- (3) $a_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$ と定める。 a_{2010} , a_{2011} , a_{2012} , a_{2013} をそれぞれ 17 で割ったときの余りを求めよ。

(同志社大)

19. $(3x^2 + x - 2)^5 (3x^2 + x - 2)^5$ の展開式における x^6 の係数を求めよ。

(慶応大)

20. $\left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right)^5$ を展開したときの、 x^3 の係数を求めよ。

(自治医科大)

21. $\left(a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^7$ を展開したときの、 $ab^2 ab^2$ の係数を求めよ。

(関西学院大)

22. p は素数、 r は正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) x_1, x_2, \dots, x_r についての式 $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^p$ を展開したときの単項式 $x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_r^{p_r}$ の係数を求めよ。ここで、 p_1, p_2, \dots, p_r は 0 または正の整数で $p_1 + p_2 + \dots + p_r = p$ をみたすとする。

(2) x_1, x_2, \dots, x_r が正の整数のとき、 $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^p - (x_1^p + x_2^p + \dots + x_r^p)$ は p で割り切れることを示せ。

(3) r は p で割り切れないとする。このとき、 $r^{p-1} - 1$ は p で割り切れることを示せ。

(大阪大)

§ 21. 二項定理・多項定理

1. 順に 60, -20
2. $\frac{5}{2}$
3. $a = \pm 1$
4. (1) $(1+1)^n$
 (2) $k_n C_k = \frac{k \cdot n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = n_{n-1} C_{k-1}$ (
5. 2^{n-1}
6. (1) $\frac{n!}{(n-r)!r!} 3^{n-r}$ (2) $\frac{3(r+1)}{n-r}$
 (3) $r = 24, 25$
7. x^{13}
8. $\frac{2^{n+1}}{n+1}$
9. $n(n-1) \times 2^{n-2}$
10. ${}_{100}C_{50}$
11. 略
12. (1) m が奇数 (2) (3) 共に略
13. 略
14. (1) 22 (2) 13
15. 略
16. (1) 略 (2) 略 (3) 2
17. (1) 略 (2) 201 (3) 割り切れない
18. (1) 略 (2) n が偶数のとき 0 n が奇数のとき 15 (3) 7, 15, 14, 12
19. 555
20. $\frac{15}{2}$
21. 735
22. (1) $\frac{P!}{p_1! p_2! \cdots p_r!}$ (2) 略 (3) 略