

§ 28 三角関数 1

1. $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$ とし、 $\tan \alpha = \frac{1}{5}$, $\tan \beta = \frac{2}{3}$ とする。このとき、 $\alpha + \beta$ の値を

求めよ。

(関西大)

2. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ なる α, β が、 $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\sin \beta = \frac{3}{5}$ を満たすとき、 $\alpha + \beta$

の値を求めよ。

(防衛大)

3. θ を第1象限の角で $\sin \theta = \frac{1}{3}$ であるものとする。

$\cos \theta = [\text{ア}]$, $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = [\text{イ}]$, $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = [\text{ウ}]$ である。

(京都産業大)

4. $90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき、 $\tan \theta = a$ とおいて、 $\cos \theta, \sin \theta$ を a の式で表せ。

(愛知工業大)

5. $\tan \theta = 3$ であるとき、 $\tan 2\theta$ の値は [] である。

(京都産業大)

6. $\tan \theta = \frac{1}{3}$ であるとき、 $\sin 2\theta = [\text{ }]$ である。

(関西大)

7. 実数 θ が $\tan \frac{\theta}{2} = 2$ を満たすとき、 $\tan \theta = [\text{ア}]$, $\sin \theta = [\text{イ}]$ である。

(同志社大)

8. 不等式 $\sin 2x + \sin x - \cos x > \frac{1}{2}$ を満たす x の範囲を求めよ。ただし、 $0 \leq x < 2\pi$

とする。

9. $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき、 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - \alpha)$ を満たす α の値は [ア] である。ただし、 $0 \leq \alpha < \pi$ とする。また、 $f(x)$ が最大となるときの x の値は [イ] である。

(芝浦工業大)

10. 関数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x + 1$ ($0 \leq x \leq \pi$) がある。方程式 $f(x) = 0$ の解は [ア] である。また、 $f(x)$ の最大値と最小値の差は [イ] である。

(関西大)

11. $0 \leq x < 2\pi$ のとき、 $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1$ を満たす x の値は $x =$ [ア], [イ] である。

(関西大)

12. $-\pi \leq \theta < \pi$ のとき、不等式 $\cos \theta + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) > 0$ を解け。

(東京理科大)

13. $-\pi \leq x < \pi$ とする。さらに x が $\cos x - \cos 2x \geq 0$ を満たすとき、 $\sin x + \sqrt{3} \cos x$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(和歌山大)

14. $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $2 \cos\left(3\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leq 0$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(近畿大)

15. $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ のとき、 $\sin(4\theta - 60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は全部で [] 個ある。

(自治医科大)

16. $\alpha > 0^\circ$, $\beta > 0^\circ$, $\alpha + \beta < 180^\circ$ を満たす α , β を考える。このとき、 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2(\alpha + \beta)$ ならば、 $\alpha + \beta =$ [ア] $^\circ$ となり、 $\sin \alpha + \sin \beta$ のとりうる値の範囲は、[イ] $< \sin \alpha + \sin \beta \leq$ [ウ] である。

(近畿大)

17. $\frac{\sin 105^\circ - \cos 105^\circ}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}$ の値を求めよ。

(福岡教育大)

18. $x - y = \frac{\pi}{3}$ であるとき、 $\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y}$ の値は [] である。

(関西大)

19. $\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin([\quad])$ である。

(関西大)

20. $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin^2 \theta$

(2) $\cos^6 \theta - \sin^6 \theta - 15 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + 15 \cos^2 \theta \sin^4 \theta$

(南山大)

21. 次の式の値は θ に無関係な定数であることを証明せよ。

$$\sin^2 \theta + \sin^2 \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \theta \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

(甲南大)

22. θ の関数 $\sin \theta \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)$ は、定数 a, b を用いて $a \sin^3 \theta + b \sin \theta$ と表すことができる。 a, b の組 (a, b) は $[\quad]$ である。

(関西大)

23. $-90^\circ < x < 0^\circ$ において、 $\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = 8$ のとき、 $\tan \frac{x}{2} = [\quad]$ となる。

(京都薬科大)

24. (1) 一般角 θ に対して $\sin \theta, \cos \theta$ の定義を述べよ。

(2) (1) で述べた定義にもとづき、一般角 α, β に対して、

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{cases} \quad \text{を証明せよ。}$$

(東京大)

25. $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}, \sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{3}$ のとき、次の問いに答えよ。

(1) $\cos(\alpha - \beta)$ の値を求めよ。

(2) 一般に次の式が成り立つことを示せ。

$$\cos 2x + \cos 2y = 2 \cos(x+y) \cos(x-y)$$

(3) $\cos(\alpha + \beta)$ の値を求めよ。

(和歌山大)

26. 次の問いに答えよ。

(1) 次の式が成り立つことを示せ。

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

(2) 自然数 n に対して、

$$2 \sum_{k=1}^n \cos 2k\theta \sin \theta = \sin(2n+1)\theta - \sin \theta \text{ が成り立つことを示せ。}$$

(3) 自然数 n に対して、

$$\tan \frac{\pi}{4n} = \frac{1}{1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n}} \text{ が成り立つことを示せ。}$$

(和歌山大)

27. (1) $\tan 24^\circ \tan 66^\circ = [\text{ア}]$ である。また、 $\tan 1^\circ$ から $\tan 89^\circ$ までの積の値 $\tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \cdots \tan 87^\circ \tan 88^\circ \tan 89^\circ = [\text{イ}]$ である。

(2) $a = \tan 24^\circ$ とする。以下、 a を用いて表すと $\cos 24^\circ$ は $[\text{ウ}]$ であり、 $\sin 24^\circ$ は $[\text{エ}]$ である。 $\tan 57^\circ - \tan 33^\circ$ は $[\text{オ}]$ となり、 $\tan 57^\circ$ は $[\text{カ}]$ であり、 $\tan 33^\circ$ は $[\text{キ}]$ である。次に、 $\cos 57^\circ \cos 33^\circ$ は $[\text{ク}]$ である。したがって $(\cos 57^\circ + \cos 33^\circ)^2$ は $1 + [\text{ケ}]$ となる。また、 $\tan 24^\circ + \tan 33^\circ + \tan 123^\circ = [\text{コ}]$ である。

(同志社大)

28. x, y は $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ の範囲にある 0 でない実数で、次の等式

$$\sin^3 x + \sin^3 y = \frac{3\sqrt{15}}{32}, \frac{\sin y}{\sin x} + \frac{\sin x}{\sin y} = 3 \text{ を満たすとする。このとき } x + y \text{ の値を求めよ。}$$

(大阪大)

29. 次の問いに答えよ。

(1) $x + y = \frac{\pi}{3}$ のとき、 $\sin x + \sin y$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\sin x + \sin y = \frac{8}{5}$ のとき、 $\sin(x + y)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(弘前大)

30. $\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形とする。 $\angle A, \angle B$ の大きさをそれぞれ A, B とおく。 $A = 30^\circ$ のとき、次の問いに答えよ。

(1) 頂点 A から対辺 BC におろし他垂線を AH とする。ただし、 H は辺 BC 上の点である。このとき、 $\frac{AH}{BC}$ の値を求めよ。

(2) $\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos B$ の値を求めよ。

(千葉大)

31. $1 < a < 2$ とする。3辺の長さが $\sqrt{3}$, a , b である鋭角三角形の外接円の半径が1であるとする、このとき b を a を用いて表せ。

(京都大)

32. $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

$$\sin 2\theta - 2\sqrt{3}\cos^2 \theta - 2\sqrt{2}\cos \theta = 0$$

(和歌山大)

33. $A \geq 0$, $B > 0$, $A + B = 90^\circ$ であるとき、 $\sin A + \sin B$ の最大値・最小値を求めよ。また、そのときの A , B の値も求めよ。

(摂南大)

34. 次の問いに答えよ。

(1) 任意の θ に対して、 $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\theta = 18^\circ$ のとき、 $\cos 2\theta = \sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(3) $\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

(熊本大)

35. (1) 角 α が $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $\cos 2\alpha = \cos 3\alpha$ を満たすとき、 α は何度か。

(2) $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$ が成り立つことを示せ。

(3) (1)の角 α に対して、 $\cos \alpha$ の値を求めよ。

(滋賀大)

36. $\cos \frac{2\pi}{5}$ の値を求めよ。

(お茶の水大)

37. $\triangle ABC$ の3つの角 A , B , C に対して、 $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$ であるとき、 $\cos 2A$ の値は $\left[\frac{\quad}{32}\right]$ である。

(関西大)

38. 次の2つの等式を満たす α , β をすべて求めよ。ただし、 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。

(1) $\cos \alpha = \cos 3\alpha$

(2) $\cos 2\beta = \cos 4\beta$

(愛知大)

39. $0^\circ < \theta < 90^\circ$, $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ のとき、次の問いに答えよ。

- (1) θ の値を求めよ。
- (2) $\sin \theta$ の値を求めよ。
- (3) $\sin \theta \sin 2\theta \sin 3\theta \sin 4\theta$ の値を求めよ。

(岡山県立大)

40. $\alpha = \cos(3\theta)$, $A = \cos \theta$, $B = \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)$, $C = \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right)$ とおく。

- (1) $A^2 + B^2 + C^2$ を求めよ。
- (2) $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$ を α で表せ。

(学習院大)

41. $0^\circ < x < 180^\circ$ とする。不等式 $\sin x + \sin 2x + \sin 3x > 0$ を解け。

(釧路公立大)

42. 次の問いに答えよ。

- (1) $\sin \theta = \frac{1}{5}$ であるとき、 $\sin 3\theta$ の値を求めよ。
- (2) $0 \leq x \leq \pi$ とする。このとき、 $-2 \sin 3x - \cos 2x + 3 \sin x + 1 \leq 0$ を満たすような x の値の範囲を求めよ。

(和歌山大)

43. x, y の動く範囲を $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$ とするとき、不等式 $\sin x + \sin y \geq \cos x + \cos y$ の表す領域を平面上に図示せよ。

(学習院大)

44. x と y が連立方程式 $\begin{cases} \sin x + \cos x + \sin y + \cos y = a \\ \sin x - \cos x - \sin y + \cos y = b \end{cases}$ を満たしている。次の問い

に答えよ。ただし、 $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$ とする。

- (1) $\sin(x+y)$ を a, b で表せ。
- (2) $b=0$ かつ $a \neq 0$ のとき、 $\sin x + \cos x$ を a で表せ。
- (3) $a=0$, $b=2\sqrt{2}$ のとき、この連立方程式を解け。

(産業医科大)

45. $\cos^2 \frac{\pi}{18} + \cos^2 \frac{7}{18}\pi + \cos^2 \frac{13}{18}\pi$ の値を求めよ。

(早稲田大)

46. $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき、次の不等式を満たす x の範囲を求めよ。

$$2 \sin x \leq \left| \sqrt{1 + \cos 2x} - \sqrt{1 - \cos 2x} \right|$$

(広島大)

47. すべての実数 x に対して、 $\cos(x + \alpha) + \sin(x + \beta) + \sqrt{2} \cos x$ が一定になるような α, β を求めよ。ただし、 $0 < \alpha < 2\pi, 0 < \beta < 2\pi$ とする。

(岐阜大)

48. 関数 $y = \sin x + \cos 2x$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(和歌山大)

49. $0 \leq x < 2\pi$ のとき、 $y = 3 \cos 2x + 2 \sin^2 x - 4 \cos x - 2$ の最大値・最小値を求めよ。

(関西大)

50. $t = \cos x \sin y = \sin x + \cos y$ であるとき、

- (1) $\sin x \cos y$ を t で表せ。
- (2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(同志社大)

51. $0 \leq \theta \leq \pi$ に対し、

$x = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta, y = \sqrt{3} \sin 2\theta + \cos 2\theta - 2 \sin \theta - 2\sqrt{3} \cos \theta + 2$ とする。このとき、 x のとりうる値の範囲は[ア]である。また、 y を x の2次式で表すと、 $y = [\text{イ}]$ であり、 y のとりうる値の範囲は[ウ]である。

(南山大)

52. a を実数とし、関数 $f(x)$ を $f(x) = a(\sin x + \cos x) - \sin x \cos x$ によって定義する。

- (1) $t = \sin x + \cos x$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $f(x)$ の最大値が3となるときの a の値を求めよ。

(北海道大)

§ 28. 三角関数 1

1. 45°

3. $[\mathcal{A}] = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $[\mathcal{I}] = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 $[\mathcal{U}] = \frac{1+2\sqrt{6}}{6}$

5. $-\frac{3}{4}$

7. $[\mathcal{A}] = -\frac{4}{3}$ $[\mathcal{I}] = \frac{4}{5}$

9. $[\mathcal{A}] = \frac{\pi}{3}$ $[\mathcal{I}] = \frac{5\pi}{6}$

11. $[\mathcal{A}] = \frac{\pi}{2}$ $[\mathcal{I}] = \frac{7\pi}{6}$

13. $-\sqrt{3} \leq \sin x + \sqrt{3} \cos x \leq 2$

15. 9

17. 1

19. $\left(\frac{2n+1}{2}\right)x$

21. 与式 = $\frac{3}{4}$

23. $-\frac{1}{8}$

25. (1) $-\frac{59}{72}$ (2) 略 (3) $\frac{5}{13}$

27. $[\mathcal{A}] 1 [\mathcal{I}] 1 [\mathcal{U}] \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

$[\mathcal{E}] \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ $[\mathcal{O}] 2a$ $[\mathcal{K}] a + \sqrt{a^2+1}$

2. $\frac{\pi}{4}$

4. $\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{a^2+1}}$, $\sin \theta = \frac{-a}{\sqrt{a^2+1}}$

6. $\frac{3}{5}$

8. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{6}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$

10. $[\mathcal{A}] = \frac{\pi}{6}$ $[\mathcal{I}] = 2 + \sqrt{3}$

12. $-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2}{3}\pi$

14.

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{11}{36}\pi$, $\frac{5}{36}\pi \leq \theta \leq \frac{13}{36}\pi$

16. $[\mathcal{A}] = 90^\circ$ $[\mathcal{I}] = 1$ $[\mathcal{U}] = \sqrt{2}$

18. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

20. (1) $\frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$ (2) 0

22. $(a, b) = \left(1, -\frac{3}{4}\right)$

24. (1) 略 (2) 略

26. (1) 加法定理 (2) 略 (3) 略

28. $\frac{\pi}{3}$

{キ} $\sqrt{a^2+1}-a$ {ク} $\frac{1}{2\sqrt{1+a^2}}$

[ケ] $1+\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ [コ] $-a$

29. (1) $-1 \leq \sin x + \sin y \leq 1$

(2) $-\frac{24}{25} \leq \sin(x+y) \leq \frac{24}{25}$

31. $b = \frac{a + \sqrt{3} \cdot \sqrt{4-a^2}}{2}$

33. 最大値 $\sqrt{2}$ ($A = B = 45^\circ$)

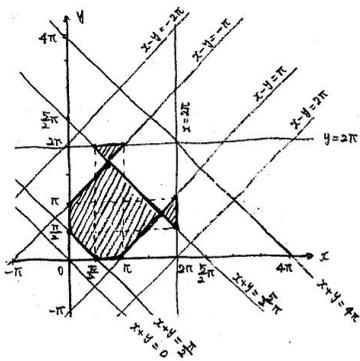
最小値 1 ($A = 0^\circ, B = 90^\circ$)

35. (1) 72° (2) 略 (3) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

37. $\frac{17}{32}$

39. (1) $\theta = 18^\circ$ (2) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{5}}{16}$

41. $0^\circ < x < 90^\circ, 120^\circ < x < 180^\circ$



43.

45. $\frac{3}{2}$

30. (1) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

32. $\frac{\pi}{2}, \frac{7}{12}\pi$

34. (1) 略 (2) 略 (3) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

36. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

38. (1) $\alpha = \frac{\pi}{2}, 0$ (2) $\alpha = 0, \frac{\pi}{3}$

40. (1) $\frac{3}{2}$ (2) $-\frac{3}{\alpha}$

42. (1) $\frac{71}{125}$

(2) $0 \leq x \leq \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi \leq x \leq \pi$

44. (1) $\frac{a^2+b^2}{4}-1$ (2) $\frac{a}{2}$

(3) $(x, y) = \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$

46. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{8}, \frac{7}{8}\pi \leq x \leq 2\pi$

$$47. (\alpha, \beta) = \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right), \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$49. \text{ 最大値 } 5 (\cos \theta = -1)$$

$$\text{最小値 } -4 \left(\cos \theta = \frac{1}{2} \right)$$

$$51. [\text{ア}] -\sqrt{3} \leq x \leq 2$$

$$[\text{イ}] y = x^2 - 2x$$

$$[\text{ウ}] -1 \leq y \leq 3 + 2\sqrt{3}$$

$$48. -2 \leq y \leq \frac{9}{8}$$

$$50. (1) -1 + \sqrt{2} |t|$$

$$(2) -2\sqrt{2} + 2 \leq t \leq 2\sqrt{2} - 2$$

$$52. (1) -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

$$(2) a = \pm \frac{7\sqrt{2}}{4}$$