§２６　対数関数

１．関数 $y=\log_2\left(\dfrac{x}{2}+3\right)$ のグラフは、関数 $y=\log_2 x$ のグラフを x 軸方向に［ ア ］、y 軸方向に［ イ ］だけ平行移動したものである。これら二つのグラフについて、共有点の x 座標は［ ウ ］である。

（関西学院大）

２．$\log_{\sqrt{3}} 9+\log_{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の値を求めよ。

（自治医科大）

３．$\log_2\sqrt{24}+\log_2\sqrt{48}-\log_2 6$ を計算せよ。

（東北工業大）

４．$\log_3 8\cdot\log_2 27$ を簡単にすると［　　］である。

（京都産業大）

５．$\log_2 25\cdot\log_3 16\cdot\log_5 27$ を計算せよ。

（東洋大）

６．$\log_{10}1.4=a$, $\log_{10}3.5=b$ とするとき、$\log_{10}7$ を a , b を用いて表せ。

（岡山理科大）

７．$\log_2 7=a$, $\log_3 7=b$ のとき、$\log_2 3$, $\log_{48}72$ の値を求めよ。

（日本工業大）

８．$\log_{10}2=a$, $\log_{10}3=b$ とおくとき、$\log_{15}\sqrt[3]{60}$ を a , b を用いて表せ。

（茨城大）

９．$\log_{10}2=a$, $\log_{10}3=b$ とするとき、$\log_{10}72$, $\log_{12}\sqrt[3]{96}$ を a , b を用いて表せ。

（西南学院大）

10．$5^a=2$, $5^b=3$ とするとき、$\log_5 72$, $\log_5 1.35$ を a , b で表せ。

（大阪電通大）

11.　$a>b>0$ とする。$2\log_{10}(a+2b)=\log_{10}a+\log_{10}b+1$ のとき、$\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{a^2}{a^2+2b^2}$ の値を求めよ。

（福岡大）

12.　次の数の大小関係を不等号で表せ。

(1)　$\dfrac{1}{3}\log_5 2$, $\dfrac{1}{5}\log_5 3$

(2)　$\dfrac{1}{5}\log_5 3$, $\dfrac{\log_5 2\times\log_5 9}{4}$

（広島工大）

13.　$\dfrac{1}{5}<a<\dfrac{4}{5}<b<1$ とする。$\log_b\dfrac{1}{5}$, $\log_b\dfrac{4}{5}$, $\log_a b$, $\log_{\frac{4}{5}}b$, 1 のうち最小であるものと、最大であるものを求めよ。

（神戸学院大）

14.　方程式 $(\log_2 x)(\log_8 x)+\log_4 x+\dfrac{1}{6}=0$ を解け。

（島根大）

15.　方程式 $\log_2(x^2+x-6)-\log_2 x=1$ を解け。

（東洋大）

16.　$\log_{x-1}(x^3-2x^2-2x+3)=3$ のとき、x の値を求めよ。

（摂南大）

17.　対数方程式 $\log_{x-1}(x^3-3x^2-x+3)=2$ を解くと、$x=$[　　]となる。

（京都薬科大）

18.　$x=3+\sqrt{2}$ であるとき、$\log_4(2x^3-11x^2+9x+4)$ の数値は[　　]である。

（関西大）

19.　$\log_2(1+|2-x|)-3\log_8\dfrac{1}{1+|x|}=2$ を満たす実数 x をすべて求めよ。

（和歌山大）

20. 方程式 $3^{2-\log_2 x}+26\cdot 3^{-\log_4 x}-3=0$ を解け。

（早稲田大）

21. 方程式 $x^{\log_2 x}=64x$ を解け。

（東京電機大）

22. 方程式 $6x-9=4^{\log_2 x}$ を解け。

（立教大）

23. $\log_3 9-\log_2 8$ の値は[ア]である。方程式 $\log_3(x-2)+\log_3(2x-7)=2$ の解は[イ]である。不等式 $\log_2(x+1)+\log_2(x-2)<2$ を満たす x の範囲は[ウ]である。

（同志社大）

24. 次の不等式を満たす x の範囲を求めよ。　$2^{x\log_{0.5}x}\geqq x^{-0.5}$

（和歌山大）

25. 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\geqq\log_{\frac{1}{2}}(x+4)-1$ を満たす x の範囲を求めよ。

（立教大）

26. $\log_3(x-1)+\log_3(x+2)\leqq 2$ を満たす x の範囲を求めよ。

（甲南大）

27 不等式 $\log_2(x+1)+4\log_4(x-1)>0$ を解け。

（信州大）

28. 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(n+3)+\log_{\frac{1}{2}}(n-1)>-5$ を満たす整数 n の最大値は[ア]であり、最小値は[イ]である。

（同志社大）

29. x が $\log_2 x+\log_2(6-x)\geqq 0$ を満たすとき、$\log_2(1+x)+\log_2(7-x)$ のとり得る値の範囲を求めよ。

（和歌山大）

30. x についての不等式 $(\log_2 2x)\left(\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{4}{x}\right)\leqq 4$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

（関西大）

31. 不等式 $\log_a(x+6)+\log_a(x-1)>\log_a(9x-7)$ を解け。ただし、$0<a<1$ とする。

（福岡教育大）

32. 不等式 $\log_a(x+6)+\log_a(x-1)>\log_a(9x-7)$ を解け。ただし、$a>0$, $a\neq 1$ とする。

（福岡教育大）

33. a は定数で $0 < a < 1$ である。不等式 $2\log_a(x+a) > \log_a(2x+2)\cdots$①について次の問いに答えよ。

(1) 不等式①を満たす x の範囲を求めよ。

(2) 不等式①を満たす正の整数 x がただ一つ存在するような a の値の範囲を求めよ。

（関西大）

34. 不等式 $\log_a(x^2-2x) \leqq \log_{2a} 2(x^2-2x)$ を満たす x の値の範囲を求めよ。ただし、a は 1 , $\dfrac{1}{2}$ に等しくない正の数とする。

（島根大）

35. 不等式 $\log_2\{\log_3(x-1)+\log_3(x+7)\} < 1$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

（甲南大）

36. 関数 $\left(\log_2 \dfrac{x}{8}\right)(\log_2 2x)$ を考える。$y = (\log_2 x)^2 -$ [ア] $\log_2 x -$ [イ]が成り立ち、$1 \leqq x \leqq 8$ のとき、y は $x =$ [ウ]で最大値[エ]をとり、$x =$ [オ]で最小値[カ]をとる。

（関西学院大）

37. $1 \leqq x \leqq 1000$ であるとき、$y = (\log_{10} x)^2 + 4\log_{10} \dfrac{1}{x} + 5$ の最大値・最小値を求めよ。

（東京薬科大）

38. $y = a(\log_4 x)^2 + b\log_{\frac{1}{2}} x - 10$ が $x = \dfrac{1}{8}$ のとき最大値 -1 をとるとする。a の値を求めよ。

（福岡大）

39. 実数 x , y は $x > 0$, $y > 0$, $x + 2y = 8$ を満たしているとする。このとき、

(1) $\log_{10} x + \log_{10} y$ の最大値を求めよ。また、そのときの x , y の値を求めよ。

(2) $\log_{10} x + 2\log_{10} y$ の最大値を求めよ。また、そのときの x , y の値を求めよ。

（関西学院大）

40. 正の実数 $xy = 100$ を満たすとき、$(\log_{10} x)^3 + (\log_{10} y)^3$ の最小値と、そのときの x , y の値を求めよ。

（広島大）

41. $xy=10^5$, $10 \leqq x \leqq 1000$ のとき、$(\log_{10} x)(\log_{10} y)$ の最大値と最小値の差を求めよ。

（福岡大）

42. x が $0<x<1$ で変わるとき、関数 $\dfrac{1}{\log_x \frac{1}{8}}+\dfrac{1}{\log_{1-x} \frac{1}{8}}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

（摂南大）

43. $x>0$, $y>0$ で $y^{\log_2 x}=4$ となるとき、xy^2 のとりうる値の範囲を求めよ。

（岡山理科大）

44. $2^x=5^y=10^z$ （$x \neq 0$）のとき $xy-yz-zx$ の値を求めよ。

（徳島文理大）

45. $2^x=3^y=7$ のとき $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の値は $\log_7$ [　　] である。

（大阪工業大）

46. $2^x=3^y=24^z=\sqrt[4]{6}$ を満たす x , y , z に対して

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=$ [ア] ，$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=$ [イ] が成り立つ。

（近畿大）

47. x , y , z が $8^x=30$, $27^y=30$, $125^z=30$ を満たすとき、$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ の値を求めよ。

（中部大）

48. 連立方程式 $5^{2x}4^{y+1}=25$, $4^x5^{2y}=1$ を解け。

（摂南大）

49. 実数 x , y は $x^3=48y^2$, $y^5=54x^2$ を満たしている。10 を底とする対数を使うと、$x^3=48y^2$ より、[ア] $\log_{10} x-$ [イ] $\log_{10} y=$ [ウ] $\log_{10} 2+\log_{10} 3$ が求められ、$y^5=54x^2$ より、$\log_{10} x$ と $\log_{10} y$ の満たす同様な式が求められる。このようにして求めた 2 式より、$x=$ [エ] ，$y=$ [オ] となる。

（同志社大）

50. 次の問いに答えよ。

(1)　$x<y<z$ のとき、不等式 $xy^2-x^2y+yz^2-y^2z+zx^2-z^2x>0$ が成り立つことを示せ。

(2)　$1<a<b<c$ のとき、不等式 $\log_a \frac{c}{b}+\log_b \frac{a}{c}+\log_c \frac{b}{a}>0$ が成り立つことを示せ。

（大阪市立大）

51.　a , b , c は 1 と異なる正の数で

$\log_a b+\log_b c+\log_c a=\frac{17}{4}$, $\log_a c+\log_b a+\log_c b=5$ を満たしている。

(1)　$\log_a b$, $\log_b c$, $\log_c a$ を解とする x の 3 次方程式を作れ。

(2)　$abc=216\sqrt{6}$, $a \leqq b \leqq c$ のとき、a , b , c の値を求めよ。

（岐阜聖徳学園大）

52.　正の数 x , y が等式 $\log_{\sqrt{a}} x=1+\log_a y$ を満たす。ただし、a は 1 でない正の定数とする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1)　y を x の式で表せ。

(2)　$x-y$ の最大値を求め、そのときの x , y の値も求めよ。

（早稲田大）

53.　連立方程式 $\begin{cases} 4(\log_2 x)^2+2\log_2 y=1 \\ x^2y=2 \end{cases}$ を解け。

（関西大）

54.　連立方程式 $\begin{cases} 2^x+3^y=43 \\ \log_2 x-\log_3 y=1 \end{cases}$ を考える。

(1)　この連立方程式を満たす自然数 x , y の組を求めよ。

(2)　この連立方程式を満たす正の実数 x , y は(1)で求めた自然数の組以外に存在しないことを示せ。

（大阪大）

55.　x , y は $x\neq 1$, $y\neq 1$ を満たす正の数で、不等式

$\log_x y+\log_y x>2+(\log_x 2)(\log_y 2)$ を満たすとする。このとき x , y の組（x , y）の範囲を座標平面上に図示せよ。

（京都大）

56. x に関する方程式 $\{\log_{\frac{1}{10}}(ax)\}^2+\log_{\frac{1}{10}}x+\dfrac{1}{4}=0$ が解をもつとき、すべての解が $\sqrt{10}$ より大きくなるように a の値の範囲を定めよ。

（大阪府立大）

57. 自然数 m , n と $0<a<1$ を満たす実数 a を、等式 $\log_2 6=m+\dfrac{1}{n+a}$ が成り立つようにとる。

(1) 自然数 m , n を求めよ。

(2) 不等式 $a>\dfrac{2}{3}$ が成り立つことを示せ。

（大阪大）

58. 実数 r に対し、$n\leqq r<n+1$ となる整数 n を $[r]$ と表すことにする。正の整数 m について、 $f(m)=[m-\log_2(m+1)]$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $m+1=2^s$ となる整数 s があれば、 $f(m+1)=f(m)$ となることを示せ。

(2) $m+1=2^s$ となる整数 s がなければ、 $f(m+1)=f(m)+1$ となることを示せ。

（大阪市立大）

§26. 対数関数

1. ［ア］$=-6$, ［イ］$=-1$, ［ウ］$=6$,　　2. 3

3. $\dfrac{5}{2}$　　4. 9

5. 24

6. $\dfrac{a+b+1}{2}$

7. $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{2a+3b}{a+4b}$

8. $\dfrac{a+b+1}{3(b-a+1)}$

9. $3a+2b$, $\dfrac{5a+b}{3(2a+b)}$

10. $\log_5 72 = 3a+2b$,
$\log_5 1.35 = 3b-2a-1$

11. $\dfrac{a}{b} = 3+\sqrt{5}$
$\dfrac{a^2}{a^2+2b^2} = \dfrac{11+3\sqrt{5}}{19}$

12. (1) $\dfrac{1}{3}\log_5 2 > \dfrac{1}{5}\log_5 3$
$\dfrac{1}{5}\log_5 3 < \dfrac{\log_5 2 \times \log_5 9}{4}$

13. 最小 $\log_a b$ 最大 $\log_b \dfrac{1}{5}$

14. $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{2}$

15. $x=3$

16. $x=4$

17. $\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$

18. $\dfrac{1}{4}$

19. $x = 2-\sqrt{5}$. 1 , $\sqrt{5}$

20. $x=16$

21. $x=8$, $\dfrac{1}{4}$

22. $x=3$

23. [ア] $=-1$, [イ] $=5$,
[ウ] $= 2<x<3$

24. $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$

25. $2<x \leqq 5$

26. $1<x \leqq \dfrac{-1+3\sqrt{5}}{2}$

27. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < x$

28. [ア] $=4$, [イ] $=2$

29. $3 \leqq \log_2(1+x)(7-x) \leqq 4$

30. $\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq 8$

31. $1<x<2+\sqrt{3}$

32. $a>1 \to x>2+\sqrt{3}$
$0<a<1 \to 1<x<2+\sqrt{3}$

33. (1) $-a < x < -a+1+\sqrt{-2a+3}$

(2) $-2+\sqrt{6} \leqq a < 1$

34.

$\frac{1}{2} < a < 1 \to x \leqq 1-\sqrt{1+a}\ , 1+\sqrt{1+a} \leqq x$

$0 < a < \frac{1}{2}, 1 < a \to 1-\sqrt{1+a} \leqq x < 0$,

$2 < x \leqq 1+\sqrt{1+a}$

351. $-3+\sqrt{17} < x < 2$

36. [ア] $=2$, [イ] $=3$, [ウ] $=8$

[エ] $=0$, [オ] $=2$, [カ] $=-4$

37. 最大値 $5\left(x=1\right)$ 最小値 $1\left(x=100\right)$

38. $a=-4$

39. [ア] $=(4, 2)$, [イ] $=\log_{10} 8$

[ウ] $=\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$, [エ] $=3\log_{10}\frac{8}{3}$

40. $2\left(x=10, y=10\right)$

41. $\frac{9}{4}$

42. $\frac{2}{3}\left(x=\frac{1}{2}\right)$

43. $0 < xy^2 \leqq \frac{1}{16}, 16 \leqq xy^2$

44. 0

45. 6

46. [ア] $=4$, [イ] $=-8$

47. 3

48. $x=\log_{10} 5, y=-\log_{10} 2$

49. [ア] $=3$, [イ] $=2$, [ウ] $=4$

[エ] $=12$, [オ] $=6$

50. (1) $(y-x)(z-y)(z-x) > 0$ より

(2) 略

51. (1) $4x^3-17x^2+20x-4=0$

(2) $(a, b, c)=\left(\sqrt{6}, 6, 36\right)$

52. (1) $y=\frac{x^2}{a}$

(2) $\frac{a}{4}\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{a}{4}\right)$,

53. $x=\sqrt{2}$, $y=1$

54. (1) $\left(x, y\right)=(4, 3)$ (2) 略

55. 略

56. $0 < a < \frac{1}{10}$

57. (1) $(m, n)=(2, 1)$ (2) 略

58. (1) 略 (2) 略