

§ 2 1 複素数

1. $(1-i)a^2 + a - b(1+i) = 0$ をみたす実数の組 (a, b) は $(0, 0)$ と $([ア], [イ])$ である。ただし、 i は虚数単位である。

(関西大)

2. 虚数単位 i に対して、 $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{60}$ を計算せよ。

(大阪薬大)

3. $z = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$, $w = \frac{5-i}{2-3i}$ とすると、 $z^{11} = [ア]$ 、 $z^{2000} = [イ]$ 、 $w^7 = [ウ]$ である。

(青山学院大)

4. $i = \sqrt{-1}$ とする。複素数 $\alpha = 1 + \sqrt{3}i$ に対して、 $\frac{(\alpha+2)^6}{\alpha^3}$ の値は $[ア]$ である。

(関西大)

5. 実数 x, y が $(1+2i)(x+i) = y + xi$ を満たすとき、 $(x, y) = ([ア], [イ])$ である。ただし、 i は虚数単位である。

(京都産業大)

6. 実数 x, y が $(1+2i)x^2 + (2+yi)x - 3(1+i) = 0$ (i は虚数単位) を満たすとき、 x, y の値を求めよ。

(摂南大)

7. a を定数の実数とすると、 $(2+i)x^2 + (2+ai+i)x - 4+ai = 0$ を満たす実数 x が存在するように、 a の値を求めよ。ただし、 i は虚数単位とする。

(東北学院大)

8. k を実数の定数、 $i = \sqrt{-1}$ を虚数単位とする。

x の2次方程式 $(1+i)x^2 + (k+i)x + 3 - 3ki = 0$ が純虚数解をもつとき、 k の値を求めよ。

(摂南大)

9. w を $1+w+w^2=0$ を満たす複素数とすると、次の問いに答えよ。ただし、 n は自然数とする。

(1) $w^3 = 1$ が成り立つことを示せ。

(2) $(1+w)^{3n} = (-1)^n$ が成り立つことを示せ。

(3) 次の2つの等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k+2} = 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k} - \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k+1} = (-1)^n$$

(和歌山大)

10. a を実数、 z を0でない複素数とする。 z と共役な複素数を $\bar{z}$ で表す。

(1) $z + 1 - \frac{a}{z} = 0$ を満たす z を求めよ。

(2) $\bar{z} + 1 - \frac{a}{z} = 0$ を満たす z が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(3) $z(\bar{z})^2 + \bar{z} - \frac{a}{z} = 0$ を満たす z が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(東北大)

§ 21. 複素数

1. $(a, b) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

2. 0

3. $[\mathcal{A}] = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, [\mathcal{I}] = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

4. $[\mathcal{A}] = 216$

$[\mathcal{U}] = 8 - 8i$

5. $[\mathcal{A}] = -1$ $[\mathcal{I}] = -3$

6. $(x, y) = (-3, 5), (1, 1)$

7. $a = 2, -1$

8. $k = -1$

9. (1) $1 + \omega + \omega^2 = 0$ が成り立つので、両辺に $1 - \omega$ をかけると

$(1 - \omega)(1 + \omega + \omega^2) = 0$ より、 $1 - \omega^3 = 0$ が成り立つので、 $\omega^3 = 1$ となる。

(2) $(1 + \omega)^{3n} = (-\omega^2)^{3n} = (-1)^{3n} \cdot (\omega^3)^{2n} = (-1)^{3n} \cdot 1^{2n} = (-1)^{3n} = \{(-1)^3\}^n = (-1)^n$

よって、 $(1 + \omega)^{3n} = (-1)^n$ が成り立つ。

(3) 略

10. (1) $a = 0 \rightarrow z = -1$

$$a \neq 0 \rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

(2) $a \geq -\frac{1}{4}$ (3) $a > 0$