§３０　分数型の漸化式

１～８において、一般項 a_n を求めよ。

１．$a_1 = 4$，$a_{n+1} = \dfrac{5a_n - 3}{a_n + 1}$

２．$a_1 = 7$，$a_{n+1} = \dfrac{7a_n + 3}{a_n + 5}$

３．$a_1 = 2$，$a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 2}{a_n + 4}$

４．$a_1 = \dfrac{1}{3}$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{3 - 2a_n}$

（宮崎大）

５．$a_1 = 5$，$a_{n+1} = \dfrac{4a_n - 9}{a_n - 2}$

（東工大）

６．$a_1 = 3$，$a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 2}{a_n + 2}$

（東京理科大）

７．$a_1 = 2$，$a_{n+1} = \dfrac{4a_n + 2}{a_n + 5}$

（北里大）

８．$a_1 = 2$，$a_{n+1} = \dfrac{4a_n + 1}{2a_n + 3}$

（東北大）

９．条件 $a_1 = 2$，$a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 2}$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）を満たす数列$\{a_n\}$について、次の問いに答えよ。

漸化式の a_{n+1}, a_n を x とおくことによってできる方程式の 2 つの解を α, β（$\alpha < \beta$）とするとき、$\alpha =$［ ア ］，$\beta =$［ イ ］となる。ここで $b_n = \dfrac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}$ とおくと、数列$\{b_n\}$は、初項［ ウ ］，公比［ エ ］の等比数列となるので、数列$\{b_n\}$の一般項は $b_n =$［ オ ］になる。したがって、数列$\{a_n\}$の一般項は $a_n =$［ カ ］となる。

（立命館大）

10. 数列$\{a_n\}$を $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n+2}{2a_n+1}$（$n=1,2,3,\cdots$）で定める。また、数列$\{b_n\}$は

$b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$（$n=1,2,3,\cdots$）を満たす。次の問いに答えよ。

(1) b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(2) 数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

（和歌山大）

11. 数列$\{a_n\}$は、$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{7a_n-4}{9a_n-5}$（$n=1,2,3,\cdots$）を満たす。

(1) $a_{n+1}-\alpha=\dfrac{a_n-\alpha}{\beta(a_n-\alpha)+\gamma}$ を満たす定数α, β, γの値を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

（滋賀大）

12. $a_1=\dfrac{3}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{5a_n-1}{4a_n+1}$（$n=1,2,3,\cdots$）によって定義される数列$\{a_n\}$がある。

$b_n=\dfrac{2}{2a_n-1}$ とおくとき、b_{n+1} を b_n で表せ。また、$\{a_n\}$の第 n 項を求めよ。

（福岡大）

解答

１． $a_n=\dfrac{9\cdot 2^{n-1}-1}{3\cdot 2^n-1}$

２． $a_n=\dfrac{3\cdot 2^n+1}{2^n-1}$

３． $a_n=\dfrac{4\cdot 5^{n-1}+2^n}{4\cdot 5^{n-1}-2^{n-1}}$

４． $a_n=\dfrac{2^n-1}{2^{n+1}-1}$

５． $a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$

６． $a_n=\dfrac{2\cdot 4^n+1}{4^n-1}$

７． $a_n=\dfrac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}-1}$

８． $a_n=\dfrac{5^n+2^{n-1}}{5^n-2^n}$

９．［ ア ］-1　［ イ ］1　［ ウ ］3　［ エ ］3　［ オ ］3^n　［ カ ］$\dfrac{3^n+1}{3^n-1}$

10. (1) $b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$　(2) $b_n=-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$　(3) $a_n=\dfrac{(-3)^n-1}{(-3)^n+1}$

11. (1) $(\alpha,\beta,\gamma)=\left(\dfrac{2}{3},9,1\right)$　(2) $a_n=\dfrac{2n-1}{3n-2}$

12. $b_{n+1}=b_n+\dfrac{4}{3}$　$a_n=\dfrac{4n+5}{8n-2}$