§３７　連立漸化式

１．次の漸化式で定義される数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 5, b_1 = 2$, $\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n \end{cases}$

(2) $a_1 = 1, b_1 = 2$, $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 4a_n - b_n \end{cases}$

２．2つの数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$は関係式

$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{4a_n + b_n}{6} \\ b_{n+1} = \dfrac{-a_n + 2b_n}{6} \end{cases}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たしており、$a_1 = 1, b_1 = -2$である。

(1) $\{a_n\}$は$4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)を満たすことを示せ。

(2) 数列$\{2^n a_n\}$は等差数列であることを示せ。

(3) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$の一般項を求めよ。

（2004 愛媛大）

３．2つの数列$\{a_n\}$と$\{b_n\}$が、$a_1 = 1, b_1 = 1$および$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 6b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められているとき、次の各問いに答えよ。

(1) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)を満たす定数α, βの組を2組求めよ。

(2) a_nをnを用いて表せ。

(3) 極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$を求めよ。

（2010 宮崎大）

４．$a_1 = 1, b_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n + b_n$, $b_{n+1} = 2a_n + 4b_n$で定められている数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$がある。

(1) $a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)$を満たす$\alpha, \beta$の組を 2 組求めよ。

(2) 数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$の一般項を求めよ。

（2002 三重大）

５．関係式 $a_1 = b_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = 4a_n + b_n$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)で定まる 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。

(1) 数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列となるように定数 k の値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

（北海道教育大）

６．2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が

$a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$, $b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)によって定められている。このとき、次の[　　]を埋めよ。

(1) a_3 =[ア] , b_3 = [イ]である。

(2) $b_{n+1} - a_{n+1}$ =[ウ]($b_n - a_n$)が成り立つから、$b_n - a_n$ は n を用いて $b_n - a_n$ =[エ]と表される。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は n を用いて a_n =[オ]と表される。

(4) n を用いて表すと、$\sum_{k=1}^{n} 4^{k-1} a_k$ =[カ], $\sum_{k=1}^{n} k(b_k - a_k) = \frac{4}{9}\{$[キ]$\}$である。

（2012 関西大）

７．数列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は次の式に従って作られている。ただし、r は定数である。

$$x_1 = 3,\ y_1 = 1,\ x_{n+1} = 2rx_n + ry_n,\ \ y_{n+1} = \left(r - \frac{1}{2}\right)x_n + \left(\frac{1}{2}r + 1\right)y_n$$

このとき、次の問いに答えよ。

(1) 1 本の直線があって、点 $P_n(x_n , y_n)$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)はすべてその上にあることを示し、その直線の方程式を求めよ。

(2) 数列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ が収束する r の範囲を求め、n を限りなく大きくしたとき、点 P_n が近づいていく点の座標を求めよ。

（2011 愛知医科大）

８．$a_1 = 5$, $b_1 = 8$, $a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{2}b_n$, $b_{n+1} = 5a_n - \frac{3}{2}b_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$)で定められる 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ において $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ とすれば $\alpha + \beta$ の値は（　　）である。

（2011 兵庫医科大）

９．自然数 n の対して漸化式 $\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - b_n \\ b_{n+1} = 6a_n - 2b_n \end{cases}$, $a_1 = 1, b_1 = 2$

を満たす数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めると、a_n =（ ア ）, b_n =（ イ ）である。

（2013 愛知医科大）

10. 数列$\{a_n\}$と$\{b_n\}$を、$a_1=2, b_1=1$, $\begin{cases} a_{n+1}=4a_n-b_n \\ b_{n+1}=a_n+2b_n \end{cases}$ $(n=1,2,3,\cdots)$でにより定義する。以下の設問に答えよ。

(1) a_2 , b_2 , a_3 , b_3 を求めよ。

(2) a_n , a_{n+1} , a_{n+2} の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) $\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(4) $\{b_n\}$の一般項を求めよ。

（2019 気象大）

11. $p_1=4, q_1=-1$であり、自然数nに対して$\begin{cases} p_{n+1}=-p_n-6q_n \\ q_{n+1}=p_n+4q_n \end{cases}$で定められた数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$を考える。

(1) すべての自然数nに対して等式$p_{n+1}+aq_{n+1}=b(p_n+aq_n)$が成り立つような実数$a$, bの組を求めよ。

(2) 一般項p_n , q_nを求めよ。

（2011 津田塾大）

12. 2 つの数列を次のように定める。

$$a_1=2 , b_1=2 , \begin{cases} a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{4}b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \end{cases} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

このとき、次の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$を満たす実数$\alpha,\beta$の 2 つの組$(\alpha_1,\beta_1)$と$(\alpha_2,\beta_2)$を求めよ。ただし、$\alpha_1<\alpha_2$とする。

(2) (1)で求めたα_1に対して、$\{a_n+\alpha_1 b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$の一般項をそれぞれ求めよ。

（2019 島根大）

13. 2つの数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$をが次の漸化式にしたがうとき、一般項a_n , b_nを求めよ。

$$a_0=b_0=\frac{1}{2} , \begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{11}{18}a_n+\dfrac{1}{3}b_n \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{11}{18}b_n \end{cases} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

（2008 東京大改）

14. 2 つの数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$が
$a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n - b_n$, $b_{n+1} = a_n + 3b_n + 1$ ($n = 1 , 2 , 3 , \cdots$)で
によって定められている。
(1) $c_n = a_n + b_n + 1$ によって定められる数列$\{c_n\}$の一般項を求めよ。
(2) a_{n+1} を a_n と n を用いて表せ。
(3) $d_n = \dfrac{a_n + 1}{2^n}$ によって定められる数列$\{d_n\}$の一般項を求めよ。
(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k}$ を求めよ。

(2016 愛媛大)

15. 次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$がある。
$a_1 = 3$, $b_1 = 1$
$2a_{n+1} = 5a_n + b_n + 2^{n+1} + 4$ ($n = 1 , 2 , 3 , \cdots$)
$2b_{n+1} = a_n + 5b_n - 2^{n+1} + 4$ ($n = 1 , 2 , 3 , \cdots$)
(1) $c_n = a_n + b_n$ によって定められる数列$\{c_n\}$の一般項 c_n を n の式で表しなさい。
(2) $d_n = a_n - b_n$ によって定められる数列$\{d_n\}$の一般項 d_n を n の式で表しなさい。
(3) 数列$\{a_n\}$の一般項 a_n を n の式で表しなさい。
(4) 数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n を n の式で表しなさい。

（2019 大分大）

解答

１．(1) $a_n=\frac{1}{2}(7{\cdot}6^{n-1}+3{\cdot}2^{n-1})$, $b_n=\frac{1}{2}(7{\cdot}6^{n-1}-3{\cdot}2^{n-1})$

(2) $a_n=\frac{6}{5}{\cdot}3^{n-1}-\frac{1}{5}{\cdot}(-2)^{n-1}$, $b_n=\frac{6}{5}{\cdot}3^{n-1}+\frac{4}{5}{\cdot}(-2)^{n-1}$

２．(1) 略　(2) 略　(3) $a_n=\frac{-n+4}{3{\cdot}2^{n-1}}$, $b_n=\frac{n-7}{3{\cdot}2^{n-1}}$

３．(1) $(\alpha,\beta)=(-1,6),(6,-1)$　(2) $a_n=\frac{1}{7}\left\{9\cdot6^{n-1}-2\cdot(-1)^{n-1}\right\}$　(3) $\frac{3}{2}$

４．(1) $(1,5),\left(-\frac{1}{2},2\right)$　(2) $a_n=\frac{4}{3}\cdot5^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot2^{n-1}$ ， $b_n=\frac{8}{3}\cdot5^{n-1}+\frac{1}{3}\cdot2^{n-1}$

５．(1) $k=\pm\frac{1}{2}$　(2) $a_n=\frac{1}{4}\{3^n-(-1)^n\}$ ， $b_n=\frac{1}{2}\{3^n+(-1)^n\}$

６．［ア］$\frac{5}{8}$　［イ］$\frac{11}{16}$　［ウ］$\frac{1}{4}$　［エ］$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$　［オ］$\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$　［カ］$\frac{2}{9}(4^n-1-3n)$

［キ］$\frac{4}{9}\left\{4-(3n+4)\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

７．(1) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$　(2) $-\frac{2}{5}<r<\frac{2}{5}$　$\left(\frac{r}{5r-2},\frac{-2r+1}{5r-2}\right)$

８．17

９．ア　$\frac{4^n-(-1)^n}{5}$　イ　$\frac{4^n-6\cdot(-1)^n}{5}$

10. (1) $a_2=7$, $b_2=4$, $a_3=24$, $b_3=15$　(2) $a_{n+2}=6a_{n+1}+9a_n$

(3) $a_n=(n+5){\cdot}3^{n-2}$　(4) $b_n=(n+2){\cdot}3^{n-2}$

11. (1) $(a,b)=(2,1),(3,2)$　(2) $p_n=6-2^n$, $q_n=2^{n-1}-2$

12. (1) $(\alpha,\beta)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3) $a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n=3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

13. $a_n=b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{17}{18}\right)^n$

14. (1) $c_n=2^n$　(2) $a_{n+1}=2a_n-2^n+1$ (3) $d_n=\frac{n}{2}+1$　(4) $\frac{1}{2^n}-\frac{n^2}{4}+\frac{3n}{4}-1$

15. (1) $c_n = 2(3^n - 1)$ (2) $d_n = n \cdot 2^n$ (3) $d_n = 3^n + n \cdot 2^n - 1$

(4) $S_n = (n-1) \cdot 2^n + \frac{3^{n+1}}{2} - n - \frac{1}{2}$