§３３　等差数列・等比数列

１．(1) 等差数列$\{a_n\}$が $a_1+a_3=3$，$a_2+a_4=27$ を満たすとき、一般項a_nを求めよ。

(2) 等比数列$\{b_n\}$が $b_1+b_3=3$，$b_2+b_4=27$ を満たすとき、一般項b_nを求めよ。

（宮城教育大）

２．等差数列$\{a_n\}$は、初項から第10項までの和が175、初項から第20項までの和が650である。また、$\{b_n\}$は初項b、公差dの等差数列であり、$a_5=b_4$，$a_{10}=b_7$であるという。

(1) 数列$\{a_n\}$の初項は[ア]、公差は[イ]である。

(2) 数列$\{b_n\}$の初項と公差はそれぞれ$b=$[ウ]，$d=$[エ]である。

(3) 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$に共通して含まれる項を順にとりだし、新しい数列$\{c_n\}$を作成する。このとき、$\{c_n\}$は初項[オ]、公差[カ]の等差数列になる。また、$c_n \leqq 500$を満たすc_nの和は[キ]となる。

（九州産大）

３．1から180までの整数のうち、初項が5、公差が4の等差数列に現れる数の集合をA、初項が1、公差が6の等差数列に現れる数の集合をBとする。共通部分$A \cap B$に属する要素の個数を求めよ。

（岩手大）

４．$a_n=3n-2$，$b_n=4n+1$，$c_n=7n$ （$n=1,2,\cdots$）で定義される3つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$のどれにも現れる値のうち、1000以下となるものの個数を求めよ。

（横浜国大）

５．等差数列$2,5,8,\cdots$を$\{a_n\}$、等比数列$2,-4,8,\cdots$を$\{b_n\}$とする。数列$\{a_n\}$と数列$\{b_n\}$との両方に含まれる数を順に取り出してできる数列$\{c_n\}$の一般項を求めよ。

（大分大）

６．$(1+x)^n$ （$n \geqq 6$）の展開式におけるx^4, x^5, x^6の係数をa_4, a_5, a_6とするとき、a_4, a_5, a_6をnの式で表せ。また、a_4, a_5, a_6がこの順で等差数列になるようなnの値を求めよ。

（摂南大）

７．p, qを実数とし、$p<q$とする。更に、3つの数 $4, p, q$をある順に並べると等比数列となり、ある順に並べると等差数列となるとする。このとき、p, qの組(p, q)

をすべて求めよ。　（小樽商大）

8．$2, a, b$ および $b, c, 8$ がこの順に等比数列をなし、さらに a, b, c がこの順に等差数列をなすような a, b, c の値の組合わせを求めよ。

（京都精華大）

9．異なる3つの実数 a, b, c がこの順で等差数列をなし、a, c, b の順で等比数列をなす、更に、$abc = 27$ であるとき、a, b, c の値を求めよ。

（成蹊大）

10．数列 a, b, c は等差数列で、公差は正である。$a + b + c = 45$，$abc = 3135$ のとき、a, b, c の値を求めよ。

（東京工科大）

11．次の3つの条件をすべて満たす三角形の3辺の長さを求めよ。

(ⅰ) 最大角と最小角の差は 90° である。

(ⅱ) 3辺の長さを大きさの順に並べたものは等差数列である。

(ⅲ) 3辺の長さの和は3である。

（学習院大）

12．n を3以上の整数とする $2n$ 個の整数 $1, 2, 3, \cdots, 2n$ から無作為に異なる3個の数を選ぶとき、次の問いに答えよ。

(1) 3個の数を小さい順に並べた数列が、公差2の等差数列である選び方が何通りあるか。

(2) 3個の数を小さい順に並べた数列が、等差数列である確率を求めよ。

（滋賀大）

13．ある等差数列があり、その一般項を a_n（$n = 1, 2, 3, \cdots$）とする。

(1) 第62項が185、第74項が221のとき、一般項は $a_n =$［ ア ］である。

(2) この数列の第1項から第99項までで、偶数の値をとる項の総和は［ イ ］である。

（武庫川女子大）

14．1から200までの自然数のうち

(1) 4で割ると3余る数の和 S_1 を求めよ。

(2) 5で割ると4余る数の和 S_2 を求めよ。

(3) 4で割ると3余り、かつ5で割ると4余る数の和 S_3 を求めよ。

（北海学園大）

15．ある等差数列の第 n 項を a_n とするとき、$a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} = 365$，$a_{15} + a_{17} + a_{19} = -6$ が成立している。

(1) この等差数列の初項と公差を求めよ。

(2) この等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき、S_n の最大値を求めよ。

（岩手大）

16. 等差数列$\{a_n\}$が $a_2+a_4+a_6=453$， $a_3+a_7=296$を満たしているとき、次の問に答えよ。
(1) 一般項a_nを求めよ。
(2) 初項から第n項までの和をS_nとする。S_nの最大値とそのときのnの値を求めよ。
(3) S_nの絶対値 $|S_n|$の最小値とそのときのnの値を求めよ。

（滋賀大）

17. 数列 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$は、初項$a$、公差$d$の等差数列であり、$a_3=12$かつ$S_8>0, S_9\leqq 0$を満たす。ただし、$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$である。このとき、次の各問に答えよ。(1)，(2)は答えのみ解答欄に記入せよ。
(1) 公差dがとる値の範囲を求めよ。
(2) a_n（$n>3$）がとる値の範囲を、nを用いて表せ。
(3) $a_n>0, a_{n+1}\leqq 0$ となるnの値を求めよ。
(4) S_nが最大となるときのnの値をすべて求めよ。また、そのときのS_nをdの式で表せ。

（早稲田大）

18. 公比が負の数である等比数列がある。初項から第4項までの和は-15、第5項と第6項との和は-48であるという。この等比数列の初項と公比を求めよ。

（福岡大）

19. 第3項が8、第10項が29の等差数列$\{a_n\}$の初項をa、公差をdとする。
(1) aとdの値を求めよ。
(2) 和$2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}$を$n$の式で表せ。
(3) 200以下の a_n のうち偶数であるものの和を求めよ。

（群馬大）

20. 数列$\{a_n\}$の初項から第3項までの和が3に等しく、初項から第6項までの和が-21に等しいものとする。このとき、$\{a_n\}$が等差数列ならば、初項a_1の値は[ア]であり、公差dの値は[イ]である。また、$\{a_n\}$が等比数列ならば、初項a_1の値は[ウ]であり、公比rの値は[エ]である。(ただし、公比は実数とする。)

（新潟薬大）

21. 公比が実数である等比数列$\{a_n\}$（$n=1,2,3,\cdots$）において、

$a_6+a_7+a_8=3, a_9+a_{10}+a_{11}=-\dfrac{3}{8}$が成り立つ。 このとき、$a_{10}=$[ア]であり、

$\sum_{k=1}^{9} a_k a_{18-k} =$ [イ]である。

（近畿大）

22. k を自然数とする。数列 $\{a_n\}$ において、初めの k 項の和を T_1、次の k 項の和を T_2、その次の k 項の和を T_3 とし、以下同様に $T_4, T_5, \cdots$ を定めるとき、次の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$ が等比数列で $k=4$ とする。$T_1=5, T_2=80$ のとき、$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし、公比は整数とする。

(2) $\{a_n\}$ が等差数列ならば $\{T_n\}$ も等差数列であることを証明せよ。

（群馬大）

23. 数列 $\{a_n\}$ に対して $b_n = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ とおく。

(1) $\{a_n\}$ が等差数列ならば、$\{b_n\}$ も等差数列であることを示せ。

(2) $\{b_n\}$ が等差数列ならば、$\{a_n\}$ も等差数列であることを示せ。

(3) $\{b_n\}$ が等差数列で、$\sum_{k=1}^{10} b_{2k-1} = 20, \sum_{k=1}^{10} b_{2k} = 10$ を満たすとき、$\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

（茨城大）

24. 数列 $\{a_n\}$（$n=1, 2, \cdots$）の初項から第 n 項までの和 S_n が、

$S_n = \alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n + \delta$（$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は定数）で与えられている。

(1) $\{a_n\}$ が等差数列となるための必要十分条件を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ で表せ。

(2) $\{a_n\}$ は等差数列ではないが、第 2 項以降は等差数列となるための必要十分条件を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ で表せ。

（大阪市大）

25. k, l, m を相異なる自然数とする。

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ の第 k 項、第 l 項、第 m 項をそれぞれ p, q, r とするとき、$k(q-r)+l(r-p)+m(p-q)=0$ が成り立つことを示せ。

(2) 逆に、実数 p, q, r に対して、$k(q-r)+l(r-p)+m(p-q)=0$ が成り立つならば、 第 k 項が p、第 l 項が q、第 m 項が r となる等差数列が存在することを示せ。

（大阪教育大）

26. 正の整数 m, n（$m \geqq 3$）について、次の問に答えよ。

(1) 正の整数 p を初項とする公差 2 の等差数列 $\{a_n\}$ の第 n 項までの和が n^m であると

き、p を m と n を用いて表せ。

(2) (1)の p は奇数であることを示せ。

（関西大）

27. (1) 10 から 15 までの自然数を、連続した 2 個以上の自然数の和としてそれぞれ表せ。

(2) 自然数 n が 2 の累乗でなければ、つまり

$n = 2^m(2l+1)$（m, l は整数で、$m \geqq 0$, $l \geqq 1$）と表されるならば、

n は連続した 2 個以上の自然数の和として表されることを証明せよ。

(3) 自然数 n が 2 の累乗ならば、つまり

$n = 2^m$（m は整数で、$m \geqq 1$）ならば

n は連続した 2 個以上の自然数の和として表されないことを証明せよ

（上智大）

28. n は 3 以上の奇数で、自然数の列 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ は等比数列であるとする。

$S = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $T = \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$ とおく。

(1) 整数 T は整数 S の倍数であることを示せ。

(2) T が素数となるための初項、公比および項数 n についての条件を求めよ。

（大阪大）

29. 数列 $\{a_n\}$ は、初項 $a_1 = 2$ で、第 3 項 $a_3 = -\dfrac{1}{2}$ である。

$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k$ （$n = 1, 2, 3, \cdots$）とするとき、数列 $\{S_n\}$ は等比数列になった。このとき、次の各問に答えよ。

(1) S_n を n の式で表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ。

（鹿児島大）

30. xy 平面において、点 P_n（$n = 1, 2, 3, \cdots$）は 放物線 $y = x^2$ 上にあり、直線 P_nP_{n+1} の傾きは $\dfrac{1}{n(n+2)}$ である。P_1 が原点のとき、P_n の x 座標を求めよ。

（大阪府立大）

31. 数列 x_n を $x_n = -an^2 + bn + c$ （$n = 1, 2, 3, \cdots$）によって定める。このとき、次

の2つの条件（イ）（ロ）を満たす自然数 a , b , c を求めよ。

（イ） 4 , x_1 , x_2 はこの順で等差数列である。

（ロ）すべての自然数 n に対して $\left(\dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)^2 \geqq x_n x_{n+1}$ が成り立つ。

（京都大）

32. 数列 $\{a_n\}$ は等比数列で、初項から第3項までの和が $\dfrac{13}{3}$ 、初項から第6項までの和が $\dfrac{364}{3}$ である。次の[　　]をうめよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 は、$a_1 =$ [ア]、公比は[イ]である。

(2) $b_n = \log_3 a_n$ とおけば、数列 $\{b_n\}$ $\{b_n\}$ は初項 $b_1 =$ [ウ]、公差[エ]の等差数列である。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ を c_n とおく。$\log_3 c_n$ を n の多項式で表せば、$\log_3 c_n =$ [オ]であり、また、$c_n > 10^{10}$ を満たす最小の n は[カ]である。ただし、$\log_{10} 3 = 0.4771$ として、これを用いてもよい。

（関西大）

§33. 等差数列・等比数列

1. (1) $12n-\frac{45}{2}$ (2) $\frac{3^{2n-1}}{82}$

2. ［ア］ 4 ［イ］ 3 ［ウ］ 1 ［エ］ 5 ［オ］ 16 ［カ］ 15 ［キ］ 8448

3. 14

4. 12

5. $2\cdot 4^{n-1}$

6. $a_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ $n=7,14$

7. $(p,q)=(-8,-2)$, $(-8,16)$, $(-2,1)$

8. $(a,b,c)=(3,\frac{9}{2},6)$, $(-1,\frac{1}{2},2)$

9. $(a,b,c)=(-6,-\frac{3}{2},3)$

10. $(a,b,c)=(11,15,19)$

11. $1-\frac{\sqrt{7}}{7}$, 1 , $1+\frac{\sqrt{7}}{7}$

12. (1) $2n-4$ (2) $\frac{3}{2(2n-1)}$

13. (1) $3n-1$ (2) 7450

14. (1) 5050 (2) 4060 (3) 1090

15. (1) 238 , -15 (2) 2008

16. (1) $-3n+163$ (2) $4347(n=54)$ (3) $54(n=108)$

17. (1) $-8<d\leqq -6$
(2) $-8n+36<a_n\leqq -6n+30$ (3) $n=4$
(4) $d=-6$, $n=4,5$, 60
$-8<d<-6$, $n=4$, $48-2d$

18. 3 , -2

19. (1) $(a,d)=(2,3)$ (2) $\frac{4}{7}(8^n-1)$
(3) 3434

20. ［ア］ 4 ［イ］ -3 ［ウ］ 1 ［エ］ -2

21. ［ア］ $\frac{1}{4}$ ［イ］ $\frac{9}{4}$

22. (1) $\frac{1}{3}\times 2^{n-1}$, $-(-2)^{n-1}$ (2) 略

23. (1) 略 (2) 略
(3) $a_n=-2n+13$

24. (1) $\alpha=\delta=0$ (2) $\alpha=0,\delta\neq 0$

25. (1) 略 (2) 略

26. (1) $P^{m-1}-n+1$ (2) 略

27. (1) $10=1+2+3+4$ 他略 (2) 略 (3) 略

28. (1) 略 (2) 初項1 公比1 項数3以上の素数

29. (1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$ (2) $\begin{cases} 2 \ (n=1) \\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} (n \geqq 2) \end{cases}$

30. $\dfrac{(-1)^n}{4}+\dfrac{1}{2n(n+1)}$

31. $(a,b,c)=(1,1,2)$

32. ［ア］ $\dfrac{1}{3}$ ［イ］ 3 ［ウ］ -1 ［エ］ 1

［オ］ $\dfrac{n(n-3)}{2}$ ［カ］ 9