§３５　正五角形に関する問題

１．一辺の長さが 2 の正五角形 ABCDE がある。AC と BE の交点を F , AC と BD の交点を G , BD とCE の交点を H , CE と AD の交点を I , AD と BE の交点を J とする。次の問いに答えよ。

(1) $\angle$ABE , $\angle$BFC , $\angle$CBE , CF を求めよ。

(2) AF $= x$ とし、x を求めよ。

(3) 正五角形 ABCDE の面積を S_1 , 正五角形 FGHIJ の面積を S_2 とする。$\dfrac{S_1}{S_2}$ を求めよ。

（2018 広島県立大）

２．正五角形 ABCDE の外接円の中心を O とする。また、線分 AC と線分 BE の交点を M とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) BC = MC であることを証明せよ。

(2) $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$ の値を求めよ。

(3) $\cos\dfrac{3\pi}{5}$ の値を求めよ。

(4) $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{OA}}$ の値を求めよ。

(5) $\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ。

（2020 横浜市立大）

３．正五角形 OABCD において、$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく。この正五角形の一辺の長さを 1. OB の長さを ϕ とするとき、下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\phi\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であることを利用して、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{a}, \vec{d}, \phi$ を用いて表せ。また、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\phi\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であることを利用して、$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}, \vec{d}, \phi$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\phi\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることを利用して、ϕ の値を求めよ。

（2018 長岡技術科学大学）

４. 1 辺の長さが 2 の正五角形 ABCDE において、対角線 AD と CE の交点を F とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 線分 DF の長さを求めよ。

(2) $\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

(3) 正五角形 ABCDE の面積を求めよ。

（1997 岐阜大）

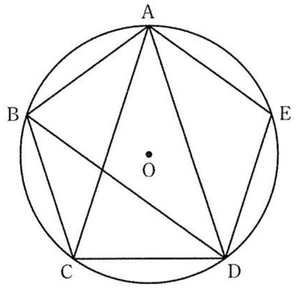
５. [　　]に適する解答をマークせよ。

(a) 1 辺の長さが 1 の正五角形について考える。（下図）

対角線 AC の長さは $\dfrac{[\ ア\ ]+\sqrt{[\ イ\ ]}}{[\ ウ\ ]}$ である。$\sin^2\angle \mathrm{BAC}=\dfrac{[\ エ\ ]-\sqrt{[\ オ\ ]}}{[\ カ\ ]}$ なので、この正五角形の外接円の半径を r とおくと、$r^2=\dfrac{[\ キ\ ]+\sqrt{[\ ク\ ]}}{[ケコ]}$ である。また、この正五角形の面積を S とすると、$\mathrm{S}^2=\dfrac{[サシ]+[スセ]\sqrt{[\ ソ\ ]}}{[タチ]}$ である。

(b) (a)の外接円の中心を O とおく。(a)の正五角形を底面とし、すべての辺の長さが 1 である五角錐を考える。頂点を F とおく。この底面に対する高さを h とすると、$h^2=\dfrac{[\ ツ\ ]-\sqrt{[\ テ\ ]}}{[トナ]}$ となる。$\angle \mathrm{AFO}=\theta$ とすると、$\sin 2\theta=\dfrac{[\ ニ\ ]\sqrt{[\ ヌ\ ]}}{[\ ネ\ ]}$ である。

(c) (b)の F を 1 辺の長さが 1 である正二十面体の頂点の一つとすると、点 A, B, C, D, E は F と辺でつながる正二十面体の頂点と考えることができる。この二十面体の外接球の半径を R とおくとき、$\mathrm{R}^2=\dfrac{[\ ノ\ ]+\sqrt{[\ ハ\ ]}}{[\ ヒ\ ]}$ である。



（2021 順天堂大）

６. 正五角形 P の各辺の中点を順に結んでできる P に内接する正五角形を P(1)とする。この操作を繰り返してできる正五角形を P(2) , P(3) , … とするとき、P(n) の面積が P の面積の $\frac{1}{3}$ より小さくなる最小の n を求めよ。

（2018 福島大）

７. $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ とおく。ただし、i は虚数単位である。次の問いに答えよ.

(1) $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ を示せ.

(2) $w=z+\frac{1}{z}$ のとき、w^2+w の値を求めよ。

(3) $\cos\frac{2\pi}{5}$ の値を求めよ。

(4) 単位円に内接する正五角形の面積を求めよ。

（2017 大阪市大）

８. (1) $x=18^\circ$ とするとき、$\sin 2x=\cos 3x$ により

$\sin 18^\circ=\frac{1}{[\text{ア}]}\left(\sqrt{[\text{イ}]}-[\text{ウ}]\right)$, $(\sin 36^\circ)^2=\frac{1}{[\text{エ}]}\left(\sqrt{[\text{オ}]}-[\text{カ}]\right)$を得る。

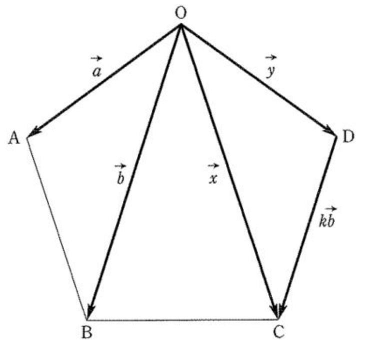
(1) 半径 1 の円に内接する正五角形の面積と、1 辺の長さが 1 である正五角形の面積はそれぞれ $\frac{[\text{キ}]}{[\text{ク}]}\sqrt{[\text{ケコ}]+[\text{サ}]\sqrt{5}}$, $\frac{[\text{シ}]}{[\text{ス}]}\sqrt{[\text{セソ}]+[\text{タチ}]\sqrt{5}}$ である。

(2) 1 辺の長さが 1 である正五角形 ABCDE において、線分 BD と線分 CE の交点, 線分 CE と線分 DA の交点, 線分 DA と線分 ED の交点, 線分 EB と線分 AC の交点, 線分 AC と線分 BD の交点をそれぞれ F , G , H , I , J とする。このとき、線分 FG の長さは $\frac{1}{[\text{ツ}]}\left([\text{テ}]-\sqrt{[\text{ト}]}\right)$であり、線分 AI , IB , BJ , JC , CF , FD , DG , GE , EH , HA によって囲まれた部分の面積を S とすると、その 2 乗 S^2 の値は $\frac{[\text{ナニ}]}{[\text{ヌ}]}-\frac{[\text{ネ}]}{[\text{ノ}]}\sqrt{[\text{ハ}]}$ である。

（2019 東京理科大）

9．一辺の長さ 1 の正五角形 OABCD について、OB と DC は平行である。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{x}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{y}$, $\overrightarrow{\mathrm{DC}}=k\vec{b}$ とするとき、次の各問いに答えよ。



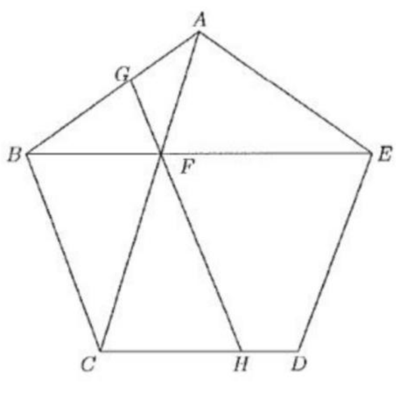
(1) k の値を求め、$\vec{x}$, $\vec{y}$ を、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いてそれぞれ表せ。

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき、cos の値を求めよ。

(3) $\vec{a}$ と $\vec{x}$ の内積を求めよ。

（2016 宮崎大）

10. 正五角形 ABCDE があり、線分 BE と線分 AC の交点を F とする。また、点 F を通る直線が辺 AB, CD とそれぞれ点 G , H で交わり、BG = 4 , CH = 5 が成り立つ。このとき線分 AG の長さを求めよ。ただし、XY で線分 XY の長さを表すものとする。



（2019 数学オリンピック予選）

11.　平面上に正五角形 ABCDE がある。その中心を O とすると、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の大きさは 1 であるという。このとき、

(1)　ベクトル $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}})=$[　ア　]である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=$[　イ　]$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ である。

(3)　この平面上に 1 点 P を、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の大きさが 5 であるようにとると、ベクトル

$(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}+\overrightarrow{\mathrm{PE}})$ の大きさは[　ウ　]である。

（1983　慶応義塾大）

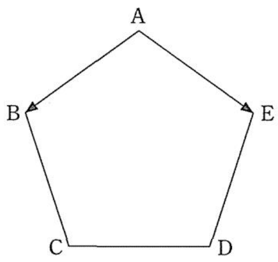
12.　正五角形 BCDEF を底面として持つすべての辺の長さが 2 の五角錐 ABCDEF について考える。対角線 BE と CF の交点を G とおくと△BCF と△GFB は相似になる。このことより $\mathrm{BE}=$[　ア　]$+\sqrt{[\ イ\ ]}$, $\mathrm{BG}=$[　ウエ　]$+\sqrt{[\ オ\ ]}$ となる。これより、

$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{[\text{カキ}]+\sqrt{[\ ク\ ]}}{[\ ケ\ ]}$ となる。頂点 A から底面に下した垂線を AO とおく。このとき、$\mathrm{OB}^2=\frac{[\ コ\ ]\sqrt{[\ サ\ ]}+[\text{シス}]}{[\ セ\ ]}$, $\mathrm{OA}^2=\frac{[\text{ソタ}]\sqrt{[\ チ\ ]}+[\text{ツテ}]}{[\ ト\ ]}$,

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=$[　ナ　]$-\sqrt{[\ ニ\ ]}$ となる。

（2013　順天堂大）

13.　一辺の長さが 1 の正五角形 ABCDE がある。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}, l=|\overrightarrow{\mathrm{EC}}|$ とするとき、以下の問いに答えよ。



(1) AB と EC が平行であることに注意して、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, l$ を用いて表せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を l をを用いて表せ。

(3) l を求めよ。

（2015 東北学院大）

14. 点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正十角形の隣り合う頂点を A , B とする。また、∠OAB の二等分線と直線 OB の交点を C とする。次の問いに答えよ。

(1) △ABC と△OAB は相似になることを示せ。

(2) 辺 AB の長さを求めよ。

(3) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ を求めよ。

(4) 半径 1 の円に内接する正五角形の一辺の長さを求めよ。

（2012 高知大）

15. $0 \leqq \theta \leqq \pi$ は $\cos 2\theta = \cos 3\theta$ を満たす。次の問に答えよ.

(1) $\alpha - \beta = 2\theta$, $\alpha + \beta = 3\theta$ を満たす α, β を θ を用いて表せ。

(2) θ の値を求めよ。

(3) $\cos\theta$ の値を求めよ。

(4) 1 辺の長さが 1 の正五角形 ABCDE の外接円の半径を R とする。R^2 の値を求めよ。

（2012 早稲田大）

解答

１．(1) ∠ABE = 36° , ∠BFC = 72° , ∠CBE = 72° , CF =2

(2) $x=\sqrt{5}-1$ (3) $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$

２．(1) 略 (2) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (3) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ (4) $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$ (5) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

３．(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}+\phi\vec{d}$ (2) $\phi=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

４．(1) $\mathrm{DF}=\sqrt{5}-1$ (2) $\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ (3) $\mathrm{S}=\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$

５．ア 1 イ 5 ウ 2 エ 5 オ 5 カ 8 キ 5 ク 5 ケ 1 コ 0 サ 2 シ 5
ス 1 セ 0 ソ 5 タ 1 チ 6 ツ 5 テ 5 ト 1 ナ 0 ニ 2 ヌ 5 ネ 5
ノ 5 ハ 5 ヒ 8

６．$n=3$

７．(1) 略 (2) 1 (3) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ (4) $\dfrac{5}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

８．ア 4 イ 5 ウ 1 エ 8 オ 5 カ 5 キ 5 ク 8 ケ 1 コ 0 サ 2 シ 1
ス 4 セ 2 ソ 5 タ 1 チ 0 ツ 2 テ 3 ト 5 ナ 2 ニ 5 ヌ 4 ネ 5
ノ 2 ハ 5

９．(1) $k=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\vec{x}=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$, $\vec{y}=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ (2) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ (3) $\dfrac{1}{2}$

10. $2\sqrt{6}-2$

11. ア $\vec{0}$ イ $5\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ ウ 25

12. ア 1 イ 5 ウ − エ 1 オ 5 カ − キ 1 ク 5 ケ 4 コ 2 サ 5 シ 1
ス 0 セ 5 ソ − タ 2 チ 5 ツ 1 テ 0 ト 5 ナ 1 ニ 5

13. (1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=l\vec{a}+\vec{b}$ (2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1-\dfrac{l^2}{2}$ (3) $l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

14. (1) 略 (2) $\mathrm{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (3) $\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ (4) $\dfrac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

15. (1) $\alpha=\dfrac{5}{2}\theta$, $\beta=\dfrac{1}{2}\theta$ (2) $\theta=0, \dfrac{2}{5}\pi, \dfrac{4}{5}\pi$ (3) $\cos\theta=1, \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$ (4) $\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$