§４０　$a\overrightarrow{\mathrm{AP}}+b\overrightarrow{\mathrm{BP}}+c\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ 型

１．平面上に△ABC と点 P があり、$2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+4\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ が成り立っている。

(1) 直線 AP と直線 BC の交点を Q とする。Q は BC を 4 : 3 に内分する点であることを示せ。

(2) △ABC の面積と△PBC の面積の比を求めよ。

（岡山理科大）

２．三角形 ABC の内部の点 P について、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+3\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ が成り立っているとする。このとき、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表すと、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=$[ア]と表される。また、直線 CP と直線 AB との交点を Q として、$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とすると、$k=$[イ]である。

（慶応大）

３．三角形 ABC の内部に点 P があり、$4\overrightarrow{\mathrm{PA}}+5\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たしている。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表すと、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=$[ア]$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+$[イ]$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である。

(2) 面積比△PAB : △PBC : △PCA を求めよ。

（神戸薬大）

４．三角形 ABC の内部に点 P を $7\overrightarrow{\mathrm{PA}}+5\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たすようにとり、直線 AP と辺 BC の交点を D とする。このとき、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=$[ア]$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+$[イ]$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=$[ウ]$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と表されるので、P は AD を[エ] : [オ]に内分し、D は BC を[カ] : [キ]に内分する。したがって、△ABP の面積は△ABC の面積の[ク]倍である。

（摂南大）

５．$\triangle$ABC の内部に点 P を、$2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たすようにとる。直線 AP と辺 BC との交点を D とし、$\triangle$PAB , $\triangle$PBC , $\triangle$PCA の重心をそれぞれ E , F , G とする。

(1) $\overrightarrow{PD}$ を $\overrightarrow{PB}$ および $\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{AC}$ (k は実数) であることを示せ。

(3) $\triangle$EFG と $\triangle$PDC の面積の比を求めよ。

（秋田大）

６．$\triangle$ABC と点 P が $4\overrightarrow{AP}-6\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ を満たしているとき、次の問いに答えよ。

(1) 直線 AB と直線 PC の交点を Q とするとき、$\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AB}$ を用いて表せ。

(2) 三角形の面積比 $\triangle$PBC : $\triangle$PCA ; $\triangle$PAB を求めよ。

(3) 直線 AB と直線 PC が直交し、かつ直線 AC と直線 PB が直交するとき、$\cos\angle$BAC を求めよ。

（大阪教育大）

７．$\triangle$ABC の内部に点 P があって、$l\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ (l , m , n は正の数) が成り立っている。

(1) 直線 AP が直線 BC と交わる点を Q とするとき、$\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ で表せ。

(2) $\triangle$ABQ の面積を $\triangle$ABC の面積 S を用いて表せ。

(3) $\triangle$PAB , $\triangle$PBC , $\triangle$PCA の面積比が 3 : 2 : 5 になるように l , m , n の比を求めよ。

（小樽商科大）

８．平面上の点 O を中心とする半径 2 の円周上に 3 点 A , B , C があり、$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たす。

(1) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を求めよ。

(2) 線分 AB の長さを求めよ。

(3) 線分 AB と線分 OC の交点を D とするとき、$\overrightarrow{OD}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ で表せ。

(4) 四角形 OBCA の面積を求めよ。

（鳥取大）

９．k は定数で、点 P は△ABC と同じ平面上にあって $3\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{BC}$ を満たしている。

(1) 点 P が辺 AB 上にあるとき、k の値を求めよ。

(2) 点 P が△ ABC の内部にあるような k の値の範囲を求めよ。

（神戸薬大）

10. 平面上に三角形 ABC と点 P があり、ベクトル $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CP}$ は $r\overrightarrow{PA}+s\overrightarrow{PB}+t\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしているとする。ただし、r, s, t は正の定数である。

(1) ベクトル $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ で表すことにより、点 P は△ABC の内部にあることを示せ。

(2) △PAB：△PBC：△PCA の面積の比を r, s, t を用いて表せ。

（大阪府立大）

11. 座標平面上の 4 点 A(1 , 2) , B(− 2 , − 1) , C(3 , 1) , P(x , y)が $\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ を満たすとき、x =[ア] , y =[イ]である。また、cos∠APB =[ウ]である。直線 AP と線分 BC の交点を Q とすると、点 Q は線分 BC を 1 : [エ]の比に内分する。また、点 P は線分 AQ を 1 : [オ]の比に内分する。

（関西学院大）

12. 平面上の 3 点 A , B , C が点 O を中心とする半径 1 の円周上にあり、$3\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たしている。このとき、線分 AB の長さを求めよ。

（早稲田大）

13. 点 O を中心とする半径 1 の円に△ABC が内接している。$5\overrightarrow{OA}+8\overrightarrow{OB}+7\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ であるとき、内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ の値は[ア]となり、$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角は[イ]である。また BC =[ウ], CA =[エ]となるから、△ABC の面積は[オ]である。

（立命館大）

14. $\triangle$ABC の外心 O から直線 BC , CA , AB に下した垂線の足をそれぞれ P , Q , R とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+3\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$ が成立しているとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の関係式を求めよ。

(2) $\angle$A の大きさを求めよ。

（京都大）

15. 平面上に 3 点 A , B , C と原点 O がある。$\sqrt{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ が成り立っているとき、$\angle$BOC =[ア]であり、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ =[イ] $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ +[ウ] $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる。これより、$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ =[エ]となり、$\triangle$ABC の面積は[オ]である。

（関西大）

解答

１．(1) 略　(2) $\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{PBC} = 9 : 2$

２．ア $\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{6}$　イ $\dfrac{2}{3}$

３．(1) ア $\dfrac{5}{12}$　イ $\dfrac{1}{4}$　(2) $\triangle\mathrm{PAB} : \triangle\mathrm{PBC} : \triangle\mathrm{PCA} = 3 : 4 : 5$

４．ア $\dfrac{1}{3}$　イ $\dfrac{1}{5}$　ウ $\dfrac{8}{15}$　エ 8　オ 7　カ 3　キ 5　ク $\dfrac{1}{5}$

５．(1) $\overrightarrow{\mathrm{PD}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{3}$　(2) $k = \dfrac{1}{3}$　(3) $\triangle\mathrm{EFG} : \triangle\mathrm{PDC} = 5 : 6$

６．(1) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　(2) $\triangle\mathrm{PBC} : \triangle\mathrm{PCA}\,;\,\triangle\mathrm{PAB} = 4 : 6 : 1$　(3) $\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

７．(1) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{m\overrightarrow{\mathrm{AB}} + n\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{m+n}$　(2) $\triangle\mathrm{ABQ} = \dfrac{n}{m+n}\mathrm{S}$　(3) $2 : 5 : 3$

８．(1) 1　(2) $\sqrt{6}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}$　(4) $\dfrac{5\sqrt{15}}{8}$

９．(1) $k = 5$　(2) $-4 < k < 5$

10. (1) 略　(2) $\triangle\mathrm{PAB} : \triangle\mathrm{PBC} : \triangle\mathrm{PCA} = t : r : s$

11. ア 1　イ $\dfrac{1}{2}$　ウ $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　エ $\dfrac{2}{3}$　オ $\dfrac{1}{5}$

12. $\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$

13. ア $-\dfrac{1}{2}$　イ $\dfrac{2}{3}\pi$　ウ $\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$　エ $\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$　オ $\dfrac{5\sqrt{3}}{7}$

14. (1) $5\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$　(2) $\angle\mathrm{A} = 45^\circ$

15. ア 90°　イ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$　ウ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　エ $\sqrt{2}$　オ $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$