No1

小 問 集 合

1. xy 平面において $y=ax^2+bx+c$ のグラフが 3 点 $(1,12)$, $(-2,6)$, $(0,6)$ を通るとき、y の最小値は[a]である。さらにこの放物線が直線 $y=kx+10-k$ と接するとき、k の値は[b], [cd]である。

2. x についての方程式 $(\log_2 x)^2-3\log_2 x^2+a=0$ の 2 解の比が 1：4 であるとき、a = [a]であり、この方程式の解は x = [b], [cd]となる。

3. AB = 5, AC = 9 である三角形 ABC の辺 BC 上に点 D をとり、∠BAD = α, ∠DAC = β とおくと、α,β はともに鋭角で $\sin\alpha=\frac{1}{5}$, $\sin\beta=\frac{1}{3}$ が成り立つ。このとき、

$\cos(\alpha+\beta)=\frac{[\ a\ ]\sqrt{[\ b\ ]}-1}{[\ cd\ ]}$ であり、AD = $\frac{[\ e\ ]\sqrt{[\ f\ ]}+[\ g\ ]\sqrt{[\ h\ ]}}{[\ i\ ]}$ である。

ただし、[f] > [h]とする。

4. n を自然数とする。$5^n<2024$ をみたす最大の n は n = [a]であり、$\frac{2024!}{5^n}$ が整数となる最大の n は n = [bcd]である。

5. $\frac{3127}{5251}$ を約分したとき、その既約分数は $\frac{[\ ab\ ]}{[\ cd\ ]}$ である。

6. 実数 x, y, z について $\frac{x+y}{5}=\frac{y+z}{2}=\frac{z+x}{3}\ (\neq 0)$ が成り立つとき、$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{[\ a\ ]}{[\ bc\ ]}$ である。

7. x の整式 $f(x)$ を $7x-4$ で割った余りが 14 であるとき、$(6x-3)f(x)$ を $7x-4$ で割ったときの余りは[a]である。

8. x, y に関する連立方程式 $\begin{cases}\cos x-\sin y=-\sqrt{3}\\ \sin x+\cos y=-1\end{cases}$ $(0\leqq x<2\pi, 0\leqq y<2\pi)$ の解は、

$x=\frac{[\ a\ ]}{[\ b\ ]}\pi$, $y=\frac{[\ c\ ]}{[\ d\ ]}\pi$ である。

9. x の方程式 $(\log_2 x)^{\log_2 x} = x^3\ (x \neq 1)$ の解は、x = [　abc　]である。

10. 4 個のサイコロを同時に投げたとき、出た目が 1 と 6 の 2 種類のみになる確率は $\frac{[\ \mathrm{a}\ ]}{[\ \mathrm{bcd}\ ]}$ である。

11. x は実数とする。$x + y > 1$ かつ$x^2 + y^2 \leqq 1$ は $x > 0$ かつ $y > 0$ であるための[　a　]。

⓪ 必要条件であるが十分条件ではない

① 十分条件であるが必要条件ではない

② 必要十分条件である

② 必要条件でも十分条件でもない

12. 方程式 $2x^3 - x^2 - x - 3 = 0$ の実数解は $x = \frac{[\ \mathrm{a}\ ]}{[\ \mathrm{b}\ ]}$ である。また、虚数解の 1 つを α とすると、$\alpha^3 =$ [　c　]であり、$(\alpha + \alpha^2)(1 + \alpha^3 + \alpha^6) =$ [　de　]となる。

13. 三角形 ABC は内接円の半径が 4 である。さらに、内接円と辺 BC , CA , AB の接点をそれぞれ D , E , F とおくと、BD = 8 , DC = 10 である。このとき、BF = [　a　]である。
また、AE = x とおき、三角形 ABC の面積を x で表すと、[　b　] x + [　cd　]となるから.、面積が 88 であるとき cos∠BAC = $\frac{[\ \mathrm{e}\ ]}{[\ \mathrm{fg}\ ]}$ となる。

14. $a > 0$ とする。$a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{2}{3}} = 4$ のとき $a^2 + a^{-2} =$ [　ab　] , $a + a^{-1} =$ [　c　]$\sqrt{[\ \mathrm{d}\ ]}$である。

15. p , r は正の実数とする。$y = p\sin\left(rx + \frac{\pi}{3}\right) + 5$ の周期のうち、正で最小のものが $\frac{\pi}{2}$ であるとき、r = [　a　]であり、$0 \leqq x \leqq \pi$ において y が最大となる x の値で最大のものは
$x = \frac{[\ \mathrm{bc}\ ]}{[\ \mathrm{de}\ ]}$ である。

16. $(x + 2)^7$ の展開式において、x^3 の係数は[　abc　]である。
また、$x^n\ \ (n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ の係数の和は[　efgh　]となる。

17. $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ とする。$\sin 2\theta=\frac{1}{2}$ のとき、$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{[\ a\ ]}}{[\ b\ ]}$, $\tan\theta=[\ \ c\ \ ]-\sqrt{[\ d\ ]}$ である。

18. 座標平面において、中心が第 1 象限にある半径 4 の円が y 軸と直線$l:\sqrt{3}x-y=0$ に接するとき、この円の方程式は $x^2+y^2-[\ \ a\ \ ]x-[\ \ b\ \ ]\sqrt{[\ c\ ]}y+[\ \ de\ \ ]=0$ と表され、この円と l の接点の座標は $([\ f\ ],[\ g\ ]\sqrt{[\ h\ ]})$ である。

19. a , b , c , d , e の 5 人の選手から 2 人を選んで第 1 戦を行う。残った 3 人から 2 人を選んで第 2 戦を行い、第 1 戦と第 2 戦のそれぞれの勝者が第 3 戦を行う。さらに第 3 戦の勝者と、第 1 戦 , 第 2 戦のどちらでも試合をしていない選手との間で決勝戦を行い、決勝戦の勝者を優勝者とする。各対戦において、勝者となる確率はどちらの対戦者も $\frac{1}{2}$ であるとする。このとき、a が第 3 戦で試合をする確率は $\frac{[\ a\ ]}{[\ b\ ]}$ であり、a が優勝者となる確率は $\frac{[\ c\ ]}{[\ d\ ]}$ である。

20. x , y が $x+y=5$, $x^2+y^2=7$ をみたすとき、$xy=[\ \ a\ \ ]$, $x^5+y^5=[\ \ bcde\ \ ]$である。

21. 2 次方程式 $x^2-kx+6-k=0$ が実数解をもつとき、k のとり得る範囲は
$k\leqq[\ ab\ ]-[\ c\ ]\sqrt{[\ d\ ]}$, $[\ ef\ ]+[\ g\ ]\sqrt{[\ h\ ]}\leqq k$である。
また、2 解がともに正の実数となるとき、k の値で整数となるものは[　i　]個ある。

22. $y=-\cos 2\theta-3\sin\theta-1\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ について、$y=0$ のとき$\theta=\frac{[\ ab\ ]}{[\ c\ ]}\pi$ である。

また、y の最大値は[　d　]である。

23. 方程式 $xy-2x-4y+2=0$ をみたす整数 x , y の組は[　a　]個ある。
また、方程式 $xy-2x-4y=n-8$ をみたす整数 x , y の組が 16 個となる正の整数 n で最も小さいものは $n=[\ \ b\ \ ]$である。

（2024　麻布大）

解答

1．(1) 4　(2) 4 , 12

2．8 , 4 , 16

3．$\frac{8\sqrt{3}-1}{15}$　,　$\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$¥

4．4　,　503

5．$\frac{53}{89}$

6．$\frac{6}{13}$

7．6

8．$x = \frac{5}{6}\pi$, $y = \frac{1}{3}\pi$

9．256

10. $\frac{7}{648}$

11. ①

12. $x = \frac{3}{2}$, $\alpha^3 = 1$, $(\alpha + \alpha^2)(\alpha + \alpha^3 + \alpha^6) = -3$

13. BF = 8　,　S = 4x + 72　,　cos∠BAC = $\frac{1}{21}$

14. 52　,　$3\sqrt{6}$

15. r = 4　,　$x = \frac{13}{24}\pi$

16. 560　,　2186

17. $\frac{\sqrt{6}}{2}$, $2 - \sqrt{3}$

18. $x^2 + y^2 - 8x - 8\sqrt{3}y + 48 = 0$　,　$(6 , 2\sqrt{3})$

19. $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$

20. $9 , -475$

21. $k \leqq -2 - 2\sqrt{7} , -2 + 2\sqrt{7} \leqq k$　,　2

22.

23.