□　3 次方程式の解と係数の関係

1. 3 次方程式$x^3-2x+4=0$ の 3 解をα , β , γとするとき、次の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$　　(3) $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$

(4) $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$　　(5) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

2. (1) -1 , 2 , 3 を 3 解とする 3 次方程式を 1 つ作成せよ。

(2) 連立方程式$x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=14$, $x^3+y^3+z^3=-18$ を解け。 ただし、$x≧y≧z$とする。

(3) $x^3-2x^2+x-3=0$ の 3 つの解をα , β , γとするとき、$\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$を 3 つの解にもつ 3 次方程式を 1 つ作成せよ。

3. 3 次方程式$x^3+ax^2+bx+2=0$ が$x=1-i$を解にもつ。このとき、実数 a , b の値と他の解を求めよ。

4. a を実数定数とする。3 次方程式$x^3+(2a-1)x^2+2ax-4a=0$ について、次の問いに答えよ。

(1) 2 重解をもつように定数 a の値を求めよ。

(2) 異なる 3 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

□　式の値

5. $x=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, $y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) x^2+y^2　　(2) x^3+y^3　　(3) x^4+y^4　　(4) x^5+y^5

(5) x^6+y^6　　(6) x^7+y^7　　(7) $x-y$　　(8) x^2-y^2

(9) x^3-y^3　　(10) x^4-y^4　　(11) x^5-y^5　　(12) x^6-y^6

(13) $\frac{y}{x+1}+\frac{x}{y+1}$　　(14) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$　　(15) $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}$

6. $x^2-5x+1=0$ $(0<x<1)$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$　　(2) $x^3+\frac{1}{x^3}$　　(3) $x^4+\frac{1}{x^4}$　　(4) $x^5+\frac{1}{x^5}$

(5) $x^6+\frac{1}{x^6}$　　(7) $x-\frac{1}{x}$　　(8) $x^2-\frac{1}{x^2}$　　(8) $x^3-\frac{1}{x^3}$

(9) $x^4-\frac{1}{x^4}$　　(10) $\frac{x^{10}-1}{x^5}$　　(11) $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$

7. $x=1+\sqrt{2}$, $y=1-\sqrt{2}$, $z=-3$ のとき。次の式の値を求めよ。

(1) $x^2+y^2+z^2$　　(2) $x^3+y^3+z^3$　　(3) $x^4+y^4+z^4$

(4) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$　　(5) $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$　　(6) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$

(7) $(x+y)(y+z)(z+x)$

□　円に内接する四角形

8. 円に内接する四角形 ABCD において、$AB=4$, $BC=5$, $AD=4$, $\angle ABC=60°$とするとき、以下の各問いに答えなさい。なお、有理化が必要な場合は、有理化しなさい。

(1) 辺 AC を求めなさい。

(2) $\angle ADC=\theta$ とするとき、$\cos\theta$ の値を求めなさい。

(3) 辺 CD を求めなさい。

(4) $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。

(5) 四角形 ABCD の面積を求めなさい。

(6) 四角形 ABCD の外接円の半径 R を求めなさい。

（2017 沖縄国際大）

9. 半径 R の円周上に点 A , B , C , D がこの順で反時計回りに並んでいる。線分 AB , AC , BC , CD の長さはそれぞれ $1, \sqrt{5}, \sqrt{2}, 2$ である。以下の問いに答えよ。

(1) $\cos B$ を求めよ。

(2) 円の半径 R を求めよ。

(3) $\cos D$ を求めよ。

(4) 線分 AD の長さを求めよ。

(5) 四角形 ABCD の面積を求めよ。

（2009　首都大東京改）

10. 円に内接する四角形 ABCD において、$AB=5$, $BC=3$, $DA=2$, $\angle ABC=60°$であるとき、次の問いに答えよ。

(1) 辺 CD の長さを求めよ。

(2) 四角形 ABCD の面積を求めよ。

(3) $\triangle BCD$ の面積を求めよ。

(4) 対角線 BD の長さを求めよ。

（2011　同志社大）

11. 円に内接する四角形 ABCD において、$AB=6$, $BC=CD=3$, $\angle ABC=120°$のとき、辺 AD の長さと、四角形 ABCD の面積を求めよ。

（福岡大）

□　分数漸化式

12. 条件 $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{a_n+2}$ $(n=1,2,3,\dots)$を満たす数列$\{a_n\}$について、次の問いに答えよ。

漸化式の a_{n+1}, a_n を x とおくことによってできる方程式の 2 つの解を $\alpha,\beta\,(\alpha<\beta)$とするとき、$\alpha=$[　ア　], $\beta=$[　イ　]となる。ここで$b_n=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$とおくと、数列$\{b_n\}$は、初項[　ウ　], 公比[　エ　]の等比数列となるので、数列$\{b_n\}$の一般項は $b_n=$[　オ　] になる。したがって、数列$\{a_n\}$の一般項は $a_n=$[　カ　] となる。

（立命館大）

13. 数列$\{a_n\}$を $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n+2}{2a_n+1}$ $(n=1,2,3,\dots)$で定める。

また、数列$\{b_n\}$は$b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$ $(n=1,2,3,\dots)$を満たす。次の問いに答えよ。

(1) b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(2) 数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

（和歌山大）

14. 数列$\{a_n\}$は、$a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{7a_n-4}{9a_n-5}$ $(n=1,2,3,\dots)$を満たす。

(1) $a_{n+1}-\alpha=\dfrac{a_n-\alpha}{\beta(a_n-\alpha)+\gamma}$ を満たす定数 α,β,γ の値を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

（滋賀大）

15. $a_1=\dfrac{3}{2}$, $a_{n+1}=\dfrac{5a_n-1}{4a_n+1}$ $(n=1,2,3,\dots)$によって定義される数列$\{a_n\}$がある。$b_n=\dfrac{2}{2a_n-1}$とおくとき、b_{n+1}を b_n で表せ。また、$\{a_n\}$の第 n 項を求めよ。

（福岡大）

□　放物線と面積

16. 放物線 $y=x^2-5x+8$ に点$(3,1)$から 2 本の接線を引く。この 2 本の接線のうち，傾きが正である方を ℓ とし，傾きが負である方を m とする．このとき，接線 ℓ の方程式は $y=$(　ア　) である。また，この放物線と 2 本の接線 ℓ, m で囲まれた部分の面積は (　イ　)である。

（慶応義塾大）

17. 放物線 $C_1: y=x^2$, $C_2: y=-(x-a)^2+b$ がある。C_1 と C_2 が点$(2,4)$を共有し，その点における接線が一致するとき，$a=$(　ア　), $b=$(　イ　) である。このとき，C_1 と C_2 および y 軸で囲まれる部分の面積は(　ウ　)である。

（神戸薬科大）

18. 2つの放物線 C_1：$y=x^2$, C_2：$y=x^2-4x+8$ に共通な接線を l とし，C_1 , C_2 との接点をそれぞれ P_1 , P_2 とする。

(1) P_1 , P_2 の x 座標を求めよ。

(2) 2つの放物線 C_1 , C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ。

（滋賀大）

19. $a>0$ とし、直線 $y=2ax$ を l とする。

(1) 点$(-1\,,0)$で x 軸に接する放物線 C_1 が直線 l にも接しているとする。その接点 P の座標は([ア] , [イウ])であり、C_1 の方程式は$y=\dfrac{[エ]}{[オ]}(x+1)^2$ である。

次に、x 軸に接する放物線 C_2：$y=p(x-q)^2$ が点 P を通り、点 P での接線が直線 l と直交しているとする。このとき、点 P での C_2 の接線の傾きは $\dfrac{[カキ]}{[クケ]}$ であり、p と q は

$p=\dfrac{1}{[コサ]a^{[シ]}}$ ，$q=[ス]+[セ]a^{[ソ]}$ である。

(2) 放物線 C_1 , x 軸 ，直線 $x=$[ア]で囲まれる部分の面積を S_1 とし、また放物線 C_2 , x 軸 ，直線 $x=$[ア]で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1 , S_2 は a を用いてそれぞれ

$S_1=\dfrac{[タ]}{[チ]}a$ ，$S_2=\dfrac{[ツテ]}{[ト]}a^{[ナ]}$と表される。したがって、$3S_1=S_2$ となｓるのは、$a=\dfrac{\sqrt{[ニ]}}{ヌ}$ のときである。

（1998　センター数Ⅱ）

解答

1. (1) 4　(2) -12　(3) 8　(4) -3　(5) 4

2. (1) $x^3-4x^2+x+6=0$　(2) $x=2$, $y=1$, $z=-3$　(3) $x^3-4x^2+5x+1=0$

3. $a=-1$, $b=0$, 他の解 $=-1$, $1+i$

4. (1) $a=-\frac{1}{6}, 0, 4$　(2) $a<-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}<a<0, a>4$

5. (1) 62　(2) 488　(3) 3842　(4) 30248　(5) 238142　(6) 1874888　(7) $2\sqrt{15}$　(8) $16\sqrt{15}$
(9) $126\sqrt{15}$　(10) $992\sqrt{15}$　(11) $7810\sqrt{15}$　(12) $61488\sqrt{15}$　(13) 7
(14) $\sqrt{10}$　(15) $7\sqrt{10}$

6. (1) 23　(2) 110　(3) 527　(4) 2525　(5) 12098　(6) $-\sqrt{21}$　(7) $-5\sqrt{21}$　(8) $-24\sqrt{21}$
(9) $-115\sqrt{21}$　(10) $-551\sqrt{21}$　(11) $\sqrt{7}$

7. (1) 15　(2) -13　(3) 115　(4) $-\frac{7}{3}$　(5) $-\frac{1}{3}$　(6) $\frac{55}{9}$　(7) 4

8. (1) $\sqrt{21}$　(2) $-\dfrac{1}{2}$　(3) 1　(4) $5\sqrt{3}$　(5) $6\sqrt{3}$　(6) $\sqrt{7}$

9. (1) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(2) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(4) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$　(5) $\dfrac{3+\sqrt{6}}{2}$

10. (1) 3　(2) $\dfrac{21\sqrt{3}}{4}$　(3) $\dfrac{189\sqrt{3}}{76}$　(4) $\dfrac{21\sqrt{19}}{19}$

11. AD = 9 , 面積 $=\dfrac{45\sqrt{3}}{4}$

12. [ア] -1　[イ] 1　[ウ] 3　[エ] 3　[オ] 3^n　[カ] $\dfrac{3^n+1}{3^n-1}$

13. (1) $b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$　(2) $b_n=-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$　(3) $a_n=\dfrac{(-3)^n-1}{(-3)^n+1}$

14. (1) $(\alpha,\beta,\gamma)=\left(\dfrac{2}{3},9,1\right)$　(2) $a_n=\dfrac{2n-1}{3n-2}$

15. $b_{n+1}=b_n+\dfrac{4}{3}$　$a_n=\dfrac{4n+5}{8n-2}$

16. ア：$y=3x-8$　イ：$\frac{2}{3}$

17. ア：4　イ：8　ウ：$\frac{16}{3}$

18. (1) P_1：1　P_2：3　(2) $\frac{2}{3}$

19. (1) ([ア] , [イウ]) = (1 , $2a$)　$y=\frac{[エ]}{[オ]}(x+1)^2=\frac{a}{2}$　$\frac{[カキ]}{[クケ]}=\frac{-1}{2a}$　$\frac{1}{[コサ]a^{[シ]}}=\frac{1}{32a^3}$

$[ス]+[セ]a^{[ソ]}=1+8a^2$

(2) $\frac{[タ]}{[チ]}a=\frac{4}{3}a$　$\frac{[ツテ]}{[ト]}a^{[ナ]}=\frac{16}{3}a^3$　$\frac{\sqrt{[ニ]}}{ヌ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$