

極 限

※は旧課程

// 例題 1 // $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (3k+2)$ を求めよ。

(東海大)

// 例題 2 // $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 8x - 1} - \sqrt{x^2 - 3})$ を求めよ。

(北海道工大)

// 例題 3 // $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x}$ を求めよ。

(東海大)

// 例題 4 // $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(n+3k)^2}{n^3}$ のとき、 S_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

(関東学院大)

// 例題 5 // $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n - (-1)^{n-1} 10^n}{15^n}$ を求めよ。

(東京理科大)

// 例題 6 // $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} \right\}$ を求めよ。

(明治大)

○問題

◆数列の極限

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 5^{n+1} + 7^{n+1}}{3^n + 5^n + 7^n}$ を求めよ。

(愛知工大)

2. a は実数、 n は整数とする。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{2 + a^{n+1}}$ が存在する必要十分条件を求めよ。

(工学院大)

◆関数の極限

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin x}{\sin 3x + \sin x}$ を求めよ。

(東海大)

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x}$ を求めよ。

(大阪工大)

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16 + \sin^2 x} - \sqrt{16 - 2\sin^2 x}}{x \tan x}$ を求めよ。

(拓殖大)

6. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{a \cos^2 x - 2b \cos x}{2 \cos^2 x - \cos x - 3} = \frac{6}{5}$ が成立するならば、定数 a, b はいくらか。

(東京理科大)

7. x は定数で $0 < x < \pi$ とする。数列 $\{a_n\}$ において、

$$a_n = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2^3} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$
とおくとき、 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(ヒント : $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ を用いて考えよ。)

(弘前大)

8. (1) $x > 0$ のとき、 $x, x - x^3, \sin x$ の大きさを次の順序にしたがって調べよ。

- ① x と $\sin x$ の大きさを調べよ。
- ② $1 - 3x^2$ と $\cos x$ の大きさを調べよ。
- ③ $x - x^3$ と $\sin x$ の大きさを調べよ。

(2) (1)の結果を利用して、 $x < 0$ のとき、 $x, x - x^3, \sin x$ の大きさを調べよ。

(3) (1), (2)の結果を利用して、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$ を求めよ。

(4) (3)を利用して、次の極限值を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} \sin x - x}{x^2}$$

(高知医大)

9. 次の極限值を求めよ。 ($0 < a < 1$)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \log \left(\frac{x-a}{1-a} \right)$$

(名古屋工大)

◆無限級数

10. 正の実数 x に対して、無限等比級数 $x + x(x^2 - x + 1) + x(x^2 - x + 1)^2 + \dots$ が収束するとき、 x の値の範囲を求めよ。また、この級数の和 S のとりうる値の範囲を求めよ。

(福岡大)

11. 次の無限級数の和を求めよ。

$$S = \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{10}{7^2} + \frac{10}{7^3} + \frac{10}{7^4} + \dots + \frac{10}{7^n} + \dots$$

(城西大)

12. 無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2r)^{n-1}$ が収束するような実数 r に対して、無限級数

$$1 + 3r + 7r^2 + 15r^3 + \dots + (2n-1)r^{n-1}$$
 は収束して、その和は[]である。

(愛知工大)

13. 1 辺の長さが 1 の正六角形 H_1 がある。 H_1 の各辺の中点を結んで正六角形 H_2 を作る。正六角形 H_2 の各辺の中点を結んで正六角形 H_3 を作る。これを繰り返して次々に正六角形 H_1, H_2, H_3, \dots を作る。 H_n の面積を A_n とおく。

(1) A_n を求めよ。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ を求めよ。

(東海大)

※ 14. 行列 $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とし、点 $P_0(1, 0)$ が f によってうつされる点

を P_1, P_1 がうつされる点を P_2, \dots とし、点列 $\{P_n\}$ を定めるとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{P_{n-1}P_n}$ を求

めよ。

(東京電機大)

15. AB を直径とする半径 a の半円の弧 AB を n 等分した分点を $P_k (k=1, 2, 3, \dots)$ とする。 $\triangle AP_k B$ の面積を S_k とするとき、次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k$$

(法政大)

◆区分求積法

16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=n+1}^{2n} \log k - n \log n \right\}$ を求めよ。

(北海道大)

17. n を自然数とし、数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 1$ と定める。放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - a_{n+1}x - a_n$

が x 軸から切り取る線分の長さを L_n とするとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} L_n$ を求めよ。

(大分大)

例題

1. $\frac{3}{2}$ 2. 4 3. $\log 3$ 4. 7 5. $\frac{4}{15}$ 6. $\frac{1}{2}$

問題

1. 7 2. $a \neq 1$ 3. $\frac{3}{4}$ 4. $\frac{1}{2}$ 5. $\frac{3}{8}$ 6. $a=6, b=-3$

7. $\frac{\sin x}{x}$ 8. (1) (ア) $x > \sin x$ (イ) $1-3x^2 < \cos x$ (ウ) $x-x^3 < \sin x$

- (2) $x < \sin x < x-x^3$ (3) 0 (4) $\frac{1}{2}$ 9. $\frac{1}{1-a}$ 10. 順に $0 < x < 1, S > 1$

11. $\frac{27}{14}$ 12. $\frac{1}{(1-2r)(1-r)}$ 13. (1) $\frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ (2) $6\sqrt{3}$

14. $\sqrt{2}+1$ 15. $\frac{2a^2}{\pi}$ 16. $2\log 2 - 1$ 17. 6