
極 限 計 算

◆ 数列の極限

1. □□ 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{n^2 - n + 1}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n^2 + 1}{2n - 3}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (2k-1)$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} (n\sqrt{n^2 + 1} - n^2)$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^3 + n} - n^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$(10) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 1})(3n + 1)$$

$$(11) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 + 2n} - \sqrt{n}}{2n}$$

練習問題

1. □□ 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (2k+3)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{(n-1)^4}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{n^3-1} \right) \times n^2$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \{1+4+7+\cdots+(3n-2)\}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 - n^2} - n \right)$$

◆ 関数の極限

1. □□ 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x - 10}{x^2 + 5x + 6}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5+x} - \sqrt{5}}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}{x} \quad (a > 0)$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - x - 6}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - x + 3} - 3}{x - 3}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{a+1} - a\sqrt{x+1}}{x - a} \quad (a > 0)$$

$$(10) \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(3x + 1 + \sqrt{9x^2 + 4x + 1} \right)$$

2. □□ 次の式が成り立つような定数 a, b, c を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - ax + b}{x - 2} = 3$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x + 1} = b$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 ax + b} - a}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^2 + bx + 8}{x - 3} = 2$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+a} + b}{x - 1} = \frac{3}{4}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+x)^3} - (a+bx)}{x^2} = c$$

練習問題

1. □□ 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^5 - 1}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \left(\frac{1-x^{20}}{1-x} - 20 \right)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{4x-3}}{\sqrt{6x-2} - \sqrt{3x+7}}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +0} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} \right)$$

2. □□ 次の式が成り立つような定数 a, b, c を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} = 3$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + ax + b}{2x^2 - x} = -1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + (b-1)x - b}{x+a} = 4$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + ax + b}}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+3} - b}{x-1} = 1$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - ax) = b$$

◆ 三角関数の極限

1. □□ 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x - 1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x + \sin x}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x - \sin 2x}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{1 - \cos x}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos\left(\frac{1}{3}x\right)}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\tan x - \sin x}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{7x^3 - 3x^5}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{\sin x}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\{x(x+a)\}}{x}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{ax} \quad (a \neq 0)$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2ax}{x \sin x} \quad (a \neq 0)$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2x - \pi)^2 (1 + \tan^2)$$

練習問題

1. □□ 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x + \tan x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)}{\sin x}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos x}{\sin x}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}$$

$$(8) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin(x+h) - \sin(x-h)}{h^2}$$

$$(9) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{\sin^4 x}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ \sin \frac{\pi}{3} - \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{x} \right) \right\}$$