数Ⅲ基礎演習

微　分　法

// 例題１ // 関数 $f(x)=\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを、導関数の定義にもとづいて証明せよ。

（大分大）

// 例題２ // $f(x)=\log(\log x)$ のとき、$f''(e)$ の値を求めよ。

（工学院大）

// 例題３ // ２つの曲線 $y=e^{\frac{x}{3}}$ と $y=a\sqrt{2x-2}+b$ が $x=3$ で接するとき、定数 a , b の値を求めよ。

（創価大）

// 例題４ // 関数 $f(x)=x(\log x)^2-x\log x-x+1$ の極値を求めよ。

（弘前大）

// 例題５ // 関数 $f(x)=x^2e^{-x}$ について

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフの概形を書け。

（神戸大）

// 例題６ // 関数 $f(x)=\dfrac{(1+x)^5}{1+x^5}$ の $x\geqq 0$ における最大値を求めよ。

（東京電機大）

// 例題７ // a は定数で $0<a<1$ とする。

$x\geqq 0$ のとき、$ax+a-\log a-1\geqq\log(1+x)$ であることを示せ。

（佐賀大）

〇問題

◆微分係数・導関数・接線

１． $f(x)=e^x\cos x$ の $x=\dfrac{\pi}{6}$ における微分係数を求めよ。

（東海大）

２． $f(x)=\dfrac{1-2\sin x}{1+2\sin x}$ の $x=\dfrac{\pi}{3}$ における微分係数を求めよ。

（東海大）

3. $\dfrac{d}{dx}\left(\log\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}\right)$ を求めよ。ただし、$-1<x<1$ とする。

（明治大）

4. 対数微分法を用いて関数 $y=x^{x^2}$ を微分せよ。

（小樽商大）

5. $x=\cos^3 t$, $y=6\sin^3 t$ のとき、第 2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

（小樽商大）

6. 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ 上の点 $A(\,a\,,(2-\sqrt{a})^2\,)\ (0<a<4)$ における接線の方程式を求めよ。

（近畿大）

◆関数の極値とグラフ

7. $x>0$ で定義された関数 $f(x)=x^x$ の極値を求めよ。

（武蔵工大）

8. 関数 $f(x)=\dfrac{\log|x|}{x}$ の極大値と極小値求めよ。

（愛知工大）

9. $y=|x-1|\sqrt{3x-1}$ の極大値を求めよ。

（旭川医大）

10. 関数 $y=xe^{-x}$ の $x\geqq 0$ における増減、極値、凹凸、変曲点を調べ、$x\to\infty$ のときの漸近線を求め、関数のグラフを書け。

（上智大）

◆関数の最大・最小

11. 関数 $\dfrac{x^2+x}{x^2+1}\ (x\geqq 0)$ の最大値を求めよ。

（神奈川大）

12. 関数 $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ の区間 $-2\leqq x\leqq 0$ における最大値と最小値を求めよ。

（愛知工大）

13. x の関数 $f(x)=(\log_2 x)^3+a\log_2 x+b$ (a,b は定数）が、$f(2)=-12$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=10$ をみたす。

(1) a , b の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の極大値と極小値を求めよ。

(3) $8 \leqq x \leqq 16$ における $f(x)$ の最小値を求めよ。

（千葉工大）

14. $f(x)=(1+\cos x)\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の最大値、最小値を求めよ。また、$y=f(x)$ のグラフを書け。

（福島大）

15. 関数 $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{2+\sin x\cos x}$ の最大値と最小値を求めよ。

（東邦大）

16. 次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y=e^{-x^2}$ の概形を書け。

(2) 平面の $0 \leqq y \leqq e^{-x^2}$ を満たす部分に含まれ、辺が座標軸と平行であるような長方形のうちで面積が最大なものとその面積を求めよ。

（長岡技科大）

17. 2 次関数 $y=ax^2+b$ $(a<0)$ と x 軸、y 軸の正の部分とで囲まれた部分の面積を S とする。ただし、この２次関数は点 $(1, 2)$ を通るものとする。

(1) S が最小となるのは a がどんな値のときか。

(2) S の最小値を求めよ。

（小樽商大）

◆ **方程式・不等式への応用**

18. 方程式 $xe^x-1=0$ の実数解はただ１つで、$\dfrac{1}{2}$ と１との間にあることを証明せよ。

（弘前大）

19. $0 \leqq x \leqq \pi$ で、$f(x)=x(\pi-x)$, $g(x)=\sin x$ とするとき、つねに $f(x) \geqq g(x)$ であることを示せ。

（東北学院大）

20. $\log f(x) = \dfrac{1}{x}\log x\ (x > 0)$ とする。

(1) $f(x)$ が増加である区間、減少である区間を求めよ。

(2) 上の (1) を利用して、100^{99} と 99^{100} の大小を調べよ。

（東京理科大）

解答

例題

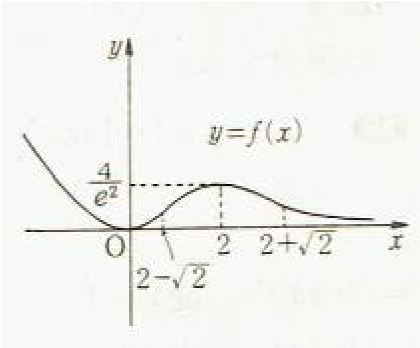
１．$\cos x$

２．$-\dfrac{2}{e^2}$

３．$a=\dfrac{2}{3}e\,,\,b=-\dfrac{1}{3}e$

４．最大値$1+5e^{-2}$　最小値$1-e$

５．(1)　$x(2-x)e^{-x}$ (2)　右図



６．16

７．左辺－右辺$=f(x)$とおくと$f'(x)=a-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{a}{1+x}\left(x-\dfrac{1-a}{a}\right)$（$x\geqq 0$）

よって$f\left(\dfrac{1-a}{a}\right)=0$より成立。

問題

１．$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}$

２．$-2+\sqrt{3}$

３．$\dfrac{2x}{(1+x^2)(1-x^2)}$

４．$y'=x^{x^2+1}(2\log x+1)$

５．$\dfrac{2}{\cos^4 t\sin t}$

６．$y=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{a}}+1\right)x+4-2\sqrt{a}$

７．$\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

８．極大値$\dfrac{1}{e}$　極小値$-\dfrac{1}{e}$

９．$\dfrac{4}{27}\sqrt{6}$

１０．漸近線 $y=0$　　変曲点 $\left(2, \dfrac{2}{e^2}\right)$

増減表　右表

１１．$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

１２．最大値 -1　最小値 $-\sqrt{2}$

１３．(1)　$a=-12, b=-1$　　(2) 極大値 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=15$　　極小値 $f(4)=-17$

(3)　-10

１４．最大値 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　最小値 $f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

１５．最大値 $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　最小値 $f\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

１６．(1) 略　　(2) 頂点 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right), \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$　　面積 $\sqrt{\dfrac{2}{e}}$

１７．(1)　$a=-1$　　(2)　$S_0=2\sqrt{3}$

１８．$f(x)=xe^x-1$ とおくと、$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$だから、$x>-1$ で $f(x)$は単調増加する。また、$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{e}}{2}-1<0, f(1)=e-1>0$ で、中間値の定理よりただ一つ解を持つ。

１９．$f(x)=x(\pi-x), g(x)=\sin x$． $h(x)=f(x)-g(x)=x(\pi-x)-\sin x$ とおくと、
$h'(x)=\pi-2x-\cos x$, $h''(x)=-2+\sin x<0$ より、$h'(x)$は単調減少で、$h'(0)=\pi-1>0$,
$h'(\pi)=-\pi+1<0$, $h(0)=h(\pi)=0$ より、常に $f(x) \geqq g(x)$である。

２０．(1) 増加区間 $0<x<e$　減少区間 $x>e$

(2) $99^{100}>100^{99}$