

積 分 法

// 例題 1 // $\int \frac{e^{2x} + 2e^x - x^2 + 1}{e^x - x + 1} dx$ を求めよ。

(小樽商大)

// 例題 2 // $\int \frac{dx}{(1 + \sqrt{x})\sqrt{x}}$ を求めよ。

(小樽商大)

// 例題 3 // $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \sin 3x dx$ を求めよ。

(東海大)

// 例題 4 // $\int_6^8 \frac{x}{x^2 - 6x + 8} dx$ を求めよ。

(弘前大)

// 例題 5 // $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ を求めよ。

(明治大)

// 例題 6 // 定積分 $\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx$ の値を求めよ。

(東京電機大)

// 例題 7 // 関数 $f(x) = \int_0^x (x-t)^2 \sin t dt$ について $f'(x)$ を求めよ。

(関東学院大)

// 例題 8 // $1 < t < e^2$, $f(t) = \int_0^2 |e^x - t| dx$ とする。

(1) $f(t)$ を求めよ。

(2) (1) の $f(t)$ を最小にする t の値を求めよ。

(大阪電通大)

// 例題 9 // $a_n = \int_0^1 x \cos^2 x dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n$ の値を求めよ。

(旭川医大)

○問題

◆定積分の計算

1. $\int_1^2 \log(2x-1)dx$ を求めよ。

(東海大)

2. $\int_{e^2}^{e^3} \frac{\log x}{x} dx$ を求めよ。

(東海大)

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| dx$ を求めよ。

(北海道工大)

4. 関数 $f(x)$ が $f'(x) = \cos 5x \cos 3x$, $f(0) = 2$ をみたすとき、 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ を求めよ。

(拓殖大)

5. $\int_0^{\log 4} \frac{e^x}{1+e^x} dx$ を求めよ。

(北海道工大)

6. 定積分 $\int_1^e \frac{\sin(\pi \log x)}{x} dx$ の値を求めよ。

(東京電機大)

7. $\int_1^e (\log x)^2 dx$ を求めよ。

(東洋大)

8. $\int_1^e x^2 \log x dx$ を求めよ。

(青山学院大)

9. $f(t) = e^{-at} \cos^2 \frac{t}{2}$ ($a > 0$) のとき、 $I(a) = \int_0^{\pi} f(t) dt$ を求めよ。

(大阪工大)

◆定積分で表された関数の最大・最小

10. $f(a) = \int_0^1 |e^t - a| dt$ とおく。 $f(x)$ の最小値を求め。つぎに $y = f(x)$ のグラフを書け。

(産業医大)

11. x の関数 $f(x) = 2 \int_0^x \sin(x-t) \sin t dt$ を考える。 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ における $f(x)$ の最大値・最小値を求めよ。

(甲南大)

12. a を正定数とする。 t が $0 \leq t \leq 1$ を動くとき、 t の関数 $\int_0^\pi (ax - t \sin x)^2 dx$ の最大値と最小値を求めよ。

(立教大)

◆定積分と極限

13. (1) $k \geq a > 0$ のとき、 $S = \int_0^k |a - x| e^{-x} dx$ を計算せよ。

- (2) $\lim_{k \rightarrow \infty} S$ を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = 0$ は使ってよい。

(名古屋市大)

14. n を自然数とし、 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ とする。

- (1) $\int \sin^n t \cos t dt$ を求めよ。

- (2) $f_n(x) = \int_0^x \sum_{k=1}^n 2k \sin^{2k-1} t \cos t$ を求めよ。

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ。

(東京農工大)

例題

1. $e^x + \frac{x^2}{2} + x + C$

2. $2\log(\sqrt{x}+1) + C$

3. $\frac{\sqrt{3}}{16}$

4. $\log\frac{8}{3}$

5. $\frac{\pi}{6}$

6. $\frac{1}{2}(1+e^{-x})$

7. $2x - 2\sin x$

8. (1) $2t\log t - 4t + e^2 + 1$ (2) $t = e$

9. $\frac{1}{2}$

問題

1. $\frac{1}{2}(3\log 3 - 2)$

2. $\frac{5}{2}$

3. $\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$

4. $\frac{9}{4}$

5. $\log\frac{5}{2}$

6. $\frac{2}{\pi}$

7. $e - 2$

8. $\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$

$$9. \frac{1}{2a}(1-e^{-a\pi}) + \frac{a}{2(a^2+1)}(1+e^{-a\pi})$$

$$10. f(\sqrt{e}) = (\sqrt{e}-1)^2$$

$$11. \text{最大値 } 2\pi \quad \text{最小値 } -2\pi$$

$$12. a > 1 \text{ のとき、 } f(1) = \frac{\pi^3 a^2}{3} - 2\pi a + \frac{\pi}{2}$$

$$0 < a \leq \frac{1}{2} \text{ のとき、 } f(2a) = \frac{\pi^3 a^2}{3} - 2\pi a^2$$

$$13. (1) 2e^{-a} + a - 1 - (k-a+1)e^{-k} \quad (2) 2e^{-a} + a - 1$$

$$14. (1) \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} t + C \quad (2) \tan^2 x (1 - \sin^{2n} x) \quad (3) \tan^2 x$$

