

面積

// 例題 1 // 関数 $f(x) = \int_1^x \log t dt$ ($x \geq 1$) について、次の問いに答えよ。

- (1) $\int_1^x \log t dt$ を計算せよ。また、 $y = f(x)$ のグラフを書け。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ の x 軸および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。
(岩手大)

// 例題 2 // 2 曲線 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ と $y = x^4$ とで囲まれる部分の面積を求めよ。

(長岡技科大)

// 例題 3 // $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において、曲線 $y = a \sin x$ (a は定数) を C_1 、 $y = \tan x$ を C_2 とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 2 曲線 C_1 、 C_2 が 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ。
- (2) a の値が (1) で求めた範囲にあるとき、2 つの曲線 C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ。

(宮崎大)

// 例題 4 // 曲線 $xy = 1$ ($x > 0$) と 2 直線 $y = ax$ 、 $y = akx$ ($a > 0$, $k > 1$) で囲まれた図形の面積が $\frac{1}{2} \log 3$ であるとき、 k の値を求めよ。

(中部大)

// 例題 5 // 曲線 $y = x \sin 2x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) を C とし、点 $(a, a \sin 2a)$ ($0 < a < \frac{\pi}{2}$) にお

ける接線 l が原点を通るとき、次の各問に答えよ。

- (1) 接線 l の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 C と接線 l で囲まれる部分の面積を求めよ。

(宮崎大)

// 例題 6 // 曲線 $y = \log x$ 上に定点 $A(1, 0)$, $B(e, 1)$ と動点 $P(t, \log t)$ ($1 < t < e$) がある。

- (1) 曲線と折れ線 APB で囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めよ。
- (2) $S(t)$ の最小値を求めよ。

(神奈川大)

// 例題 7 // xy 平面上に、媒介変数を用いて表された曲線

$x = 2\sqrt{2} \cos \theta, y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) がある。この曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

(山梨大)

○問題

◆曲線と直線とで囲まれる図形の面積

1. 曲線 $y = x \log x$ ($1 \leq x$) と直線 $x = e$ と x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。ただし、 e は自然対数の底とする。

(東京農工大)

2. 領域 $\left\{ (x, y) \mid \frac{1}{2} \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi \right\}$ の面積を求めよ。

(工学院大)

3. 関数 $f(x) = e^x \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) について、曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形を A とする。 A の面積を求めよ。ただし、 e は自然対数の底とする。

(神奈川大)

4. 関数 $f(x) = (1 - \log x) \log x$ ($x > 0$) について、

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ を解け。
- (2) 関数 $f(x)$ の極値とそのときの x の値を求めよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ の $y \geq 0$ の部分と x 軸の囲む図形の面積を求めよ。

(順天堂大)

5. 関数 $f(x) = \cos x + \cos 2x$ について

(1) $0 \leq x \leq \pi$ における関数 $f(x)$ の極小値を求めよ。

(2) (1)において、極小値を与える点の x 座標を a とする。

このとき、曲線 $f(x) = \cos x + \cos 2x$ ($a \leq x \leq \pi$)、直線 $x = a$ および x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

(九州芸工大)

◆ 2 曲線で囲まれる図形の面積

6. 曲線 $|x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}} = 1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

(大阪工大)

7. 関数 $f_1(x) = \tan \frac{\pi}{4}x$ ($-2 < x < 2$) の逆関数を $f_2(x)$ とする。

2 曲線 $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(芝浦工大)

8. a を $0 < a < \frac{\pi}{4}$ と $\cos a = \tan a$ をみたす定数とする。

(1) $\sin a$ と $\cos a$ の値を求めよ。

(2) 2 曲線 $y = \cos x$ と $y = \tan x$ の交点 $(a, \cos a)$ におけるそれぞれの接線は互いに直交することを証明せよ。

(3) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、3 曲線 $y = \cos x$ 、 $y = \tan x$ 、 $y = \sin x$ によって囲まれた図形の面積を求めよ。

(静岡大)

9. 2 曲線 $y = \sin x$ 、 $y = 2 \sin 2x$ について

(1) 2 曲線の概形を 1 つの xy 平面上に書け。

(2) 2 曲線で囲まれた図形のうち、区間 $[0, \pi]$ に部分の面積を求めよ。

(日本大)

◆曲線の接線と図形の面積

10. 2曲線 $C_1: y = \log(x+a)$, $C_2: y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + b$ がともに同じ点で直線 $y = x + c$

に接するとき、

- (1) a, b, c の値を求めよ。
- (2) 曲線 C_1, C_2 と y 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。

(群馬大)

11. $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ とし、 $a = \sin \theta, b = \cos \theta$ とおく。だ円 $C: x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ の内部で、

$a \leq x \leq b$ の部分の面積 S を θ で表せ。また S が、だ円の面積の $\frac{1}{3}$ になるとき、 θ の値を求めよ。

(東海大)

12. 実数 t を媒介変数として、 $x = 3t^2, y = 3t - t^3$ で表される曲線を考える。

- (1) y を x の関数と考えて、 y の増減を調べることによって、この曲線を xy 平面上に図示せよ。
- (2) この曲線によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(宇都宮大)

例題

1. (1) $x \log x - x + 1$ グラフ略 (2) $2 \log 2 - \frac{5}{4}$

2. $\frac{2}{\pi} - \frac{1}{5}$

3. (1) $a > 1$ (2) $a - 1 - \log a$

4. $k = 3$

5. (1) $y = x$ (2) $\frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4}$

6. (1) $1 - \frac{1}{2} \{(e-1) \log t + e - t\}$ (2) $\frac{1}{2} \{1 - (e-1) \log(e-1)\}$

7. $\frac{2}{3} \sqrt{2}$

問題

1. $\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

2. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

3. $\frac{e^\pi + 1}{2}$

4. (1) $x = e, 1$ (2) $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{4}$ (3) $3 - e$

5. (1) $-\frac{9}{8}$ (2) $\frac{3}{16} \sqrt{15}$

6. $\frac{2}{3}$

7. $2 - \frac{8}{\pi} \log 2$

8. (1) $\sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \cos \alpha = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$ (2) 略 (3) $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

9. $\frac{17}{4}$

10. (1) $a=2, b=\frac{3}{2}, c=1$ (2) $\frac{5}{3}-2\log 2$

11. $\pi-4\theta, \theta=\frac{\pi}{12}$

12. $\frac{72}{5}\sqrt{3}$