数Ⅲ基礎演習　No5

体積と弧長

//例題１// 連立不等式 $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi$, $0 \leqq z \leqq \sin(x+y)$ をみたす点 (x, y, z) 全体からなる空間図形を D とする。

(1) x 軸に垂直な平面 $x=t$ で切ったときの切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(2) D の体積 V を求めよ。

（東海大）

//例題２// 曲線 $x^2+y^4=a^4$ $(a>0)$ と x 軸で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を V_x 、同じ曲線と y 軸で囲まれる図形を y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を V_y とする。$V_x=V_y$ となるように a の値を求めよ。

（明治大）

//例題３// ２つの関数 $f(x)=\sin x+1$, $g(x)=\cos x+1$ がある。

(1) $f(x)-g(x)$ が正または0となる最大の区間 $[\,a\,,b\,]$ $(0 \leqq a < b \leqq 2\pi)$ を求めよ。区間 $[\,a\,,b\,]$ における $f(x)-g(x)$ の最大値を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに１回転してできた回転体の $x=a$ か $x=b$ までの部分の体積を求めよ。

（九州大）

//例題４// 領域 $x^2+\left(y-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \leqq 1$ を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

（東京工芸大）

//例題５//方程式$\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{1-a}}=1$　（ただし、aは$0<a<1$である定数とする）によって与えられた曲線Cとx軸、y軸とによって囲まれる部分をx軸を中心に回転して得られる立体の体積を$V(a)$とする。$V(a)$を最大とするaと$V(a)$の最大値を求めよ。

（大阪教育大）

//例題６//曲線$y=x^{\frac{3}{2}}$において、$x=\dfrac{5}{9}$から$x=a$までに対応する弧の長さを$L(a)$とする。$\left(a\geqq\dfrac{5}{9}\right)$

(1) 関数$L(a)$を求めよ。

(2) $L(a)=7$となるaの値を求めよ。

（小樽商大）

//例題７//曲線$x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$ ($t\geqq 0$, aは自然対数の底）について、
l_kを$t=k$から$t=k+1$までの曲線の長さとすると、

$l_0=$［　　　　］、$\dfrac{l_{k+1}}{l_k}=$［　　　　］、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} l_k=$［　　　　］

（日本大）

〇問題

◆回転体の体積

1．曲線$y=\sin x$とx軸で囲まれた部分を、x軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。ただし、$0\leqq x\leqq\pi$とする。

（日本工業大）

2．曲線$y=\log(3-x)$とx軸、y軸で囲まれた部分をy軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

（中部大）

3．$(4-x)y^2 = x(3-x)$, $0 \leqq x \leqq 3$, $y \geqq 0$ によって定義される x の関数 y がある。y のグラフと x 軸で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

（大分大）

4．$f(x) = \cos 2x + a\cos x + b$ とする。関数 $f(x)$ は、$x = \dfrac{\pi}{3}$ で極値 1 をとるものとする。

(1) 定数 a , b の値を求めよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 0$, $x = 2\pi$ で囲まれた図形を、x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

（新潟大）

5．連立方程式 $\cos x \leqq y \leqq \sin x$, $0 \leqq x \leqq \pi$, $y \geqq 0$ の表す領域を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を求めよ。

（国士舘大）

6．曲線 $C : y = \log x$ について、点 $(\,1\,,\,0\,)$ における C の接線と直線 $x = e$ と曲線 C とで囲まれる図形を D とする。図形 D を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

（東海大）

7． $y = e^{-x^2}$ のグラフを C とする。

(1) 第 1 象限において C と接する直線のうち y 切片が最大となるものの方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた直線と C および y 軸により囲まれる図形を y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ。

（埼玉大）

◆体積の最大・最小、極限

８．　$a>1$とする。$x \geqq 0$の範囲で、2 つの直線$y=ax$，$y=\dfrac{x}{a}$と曲線$y=\dfrac{1}{ax}$とで囲まれた図形をx軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積$V(a)$の最大値を求めよ。

（山口大）

９．nは自然数とする。

(1) 曲線$y=e^{-x}\sin x\ (0 \leqq x \leqq n\pi)$と$x$軸とで囲まれた図形を$x$軸のまわりに回転してできる回転体の体積$V_n$を求めよ。

(2) 極限値$\lim_{n\to\infty} V_n$を求めよ。

（中央大）

◆曲線の接線と図形の面積

１０．　曲線$9y^2=x(3-x)^2\ (0 \leqq x \leqq 3)$の長さ$L$を求めよ。

（城西大）

例題

１．(1) $1+\cos t$　　(2) π

２．π

３．(1) $a=\dfrac{\pi}{4}, b=\dfrac{5}{4}\pi$　最大値 $\sqrt{2}$　　(2) $4\sqrt{2}\pi$

４．$\sqrt{2}\pi\left(\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{5}{6}\right)$

５．$\dfrac{4}{405}\pi$

６．(1) $\dfrac{8}{27}\left(1+\dfrac{9}{4}a\right)^{\frac{3}{2}}-1$　　(2) $\dfrac{32}{9}$

７．順に $\sqrt{2}(1-e^{-1}), \dfrac{1}{e}, \sqrt{2}$

問題

１．$\dfrac{\pi^2}{2}$

２．$\pi(9\log 3-8)$

３．$\left(\dfrac{15}{2}-8\log 2\right)\pi$

４．(1) $a=-2, b=\dfrac{5}{2}$　　(2) $\dfrac{35}{2}\pi^2$

５．$\dfrac{\pi^2}{4}+\dfrac{\pi}{2}$

６．$\dfrac{\pi}{3}(e^3-3e^2+5)$

７．(1) $y=-\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}x+2e^{-\frac{1}{2}}$　　(2) $\left(\dfrac{5}{3\sqrt{e}}-1\right)\pi$

８．$\dfrac{\pi}{3}$

９．(1) $\dfrac{1}{8}\pi(1-e^{-2n\pi})$　　(2) $\dfrac{1}{8}\pi$

１０．$4\sqrt{3}$