# §６５　カテナリー（懸垂曲線）に関する問題

１．次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$　　(2) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(x\geqq 0)$　　(3) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

２．$y=\log(x+\sqrt{x^2+a})$ の導関数を求めよ。

３．不定積分 $\int\log(x+\sqrt{x^2+1})\,dx$ を計算せよ。

４．$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ $(x\geqq 0)$ の逆関数を $g(x)$とするとき、曲線 $y=g(x)$と $x$ 軸および $x=a$ $(a>0)$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

（慶応義塾大）

５．(1) $\log(x+\sqrt{x^2+1})$ の導関数を求めよ。

(2) $y=\sqrt{x^2+1}$ とおくと $y$ は、$y=x\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{y}$ を満たすことを示せ。

(3) 不定積分 $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ を求めよ。

(4) 双曲線 $y^2-x^2=1$ と 2 直線 $x=-1$ , $x=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

（大阪医科大）

６．関数 $f(x)=\log(x+\sqrt{x^2-1})$ $(x\geqq 1)$およびその逆関数 $g(x)$のグラフをそれぞれ $C_1$ , $C_2$とする。

(1) $C_1$ 上の点$(a, f(a))$における $C_1$ の法線 $l_1$ と $C_2$ 上の点$(f(b), b)$における $C_2$ の法線 $l_2$ とが平行であるとき、$a$ を用いて $b$ を表せ。

(2) 点$(g(1), 1)$における $C_1$ の法線 $l$ と曲線 $C_1$ および $x$ 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。

(3) 点 P が $C_1$ 上を、点 Q が $C_2$ 上をそれぞれ動くとき、線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

７．$a$ を正の定数として、関数 $f(x)$ を $f(x)=\log(\sqrt{a^2+x^2}-x)$ とおく。$f(x)$ を微分して、多項式 $f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(0)}{3!}x^3$ を求めよ。

（2012 横浜市大改）

８．(1) 関数 $\log(x+\sqrt{x^2+1})$ を微分せよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ の値を求めよ。

（2004 横浜市大）

９．次の問いに答えよ。

(1) $a$ を正の定数とするとき、関数 $f(x)=\log(x+\sqrt{a+x^2})$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $t=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくことにより、定積分 $\displaystyle I=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(3+t^2)^3}}$ を求めよ。

(3) $0≦x≦1$ であるすべての $x$ に対して、不等式 $\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{(3+t^2)^3}}≧k\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{3+t^2}}$ が成り立つための実数 $k$ の範囲を求めよ。ただし、$\log 3=1.10$ とする。

（2010 大阪府立大）

10．平面上を運動する点 P($x$, $y$)の時刻 $t$ での $x$ 座標と $y$ 座標が

$$\begin{cases} x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2} \\ y=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2} \end{cases}$$

で表されている。ただし、$e$ は自然対数の底である。原点を O, 点( 0 , 1 )を M とする。$t$ が $t=0$ の範囲で変化したとき点 P が描く曲線を C とする。時刻 $t$ において、曲線 C, 線分 OM, および線分 OP で囲まれる図形の面積を A($t$)で表し、曲線 C と線分 MP で囲まれる図形の面積を S($t$)で表す。次の問いに答えよ。

(1) 点 P($x$, $y$)の座標 $x$, $y$ に対して $y$ を $x$ を用いて表せ。

(2) 時刻 $t$ を用いて A($t$)と S($t$)を表せ。

(3) A($t$) − S($t$)が最大となる時刻 $t$ を求めよ。

（2002 九州大）

11. 次の問いに答えよ。

(1) $x+\sqrt{x^2-1}=t$ とおくことにより、不定積分 $\int\sqrt{x^2-1}\,dx$ を求めよ。

(2) 曲線 $x^2-y^2=1$ 上に点 $\mathrm{P}(p, q)$ $(p>1, q>0)$ と点 $\mathrm{A}(1, 0)$ がある。2 直線 OA , OP とこの曲線とで囲まれる図形の面積 S を $p$ の式で表せ。

(3) (2)における S を $\dfrac{\theta}{2}$ とおくとき、$p, q$ を $\theta$ の式で表せ。

(4) $x=\dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$ $(\theta\geqq 0)$ とおくことにより、不定積分 $\int\sqrt{x^2-1}\,dx$ $(x\geqq 1)$ を求めよ。

（1996 秋田大改）

12. すべての実数 $x$ において、関数 $f(x)$ は微分可能で、その導関数 $f'(x)$ は連続とする。$f(x)$ , $f'(x)$ が等式

$$\int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt=-e^{-x}+f(x)$$

を満たすとき、以下の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) $f'(0)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ を求めよ。

(4) $\int_0^1 x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ を求めよ。

（2015 群馬大）

解答

１． (1) $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ (2) $y=\log(x+\sqrt{x^2-1})$ (3) $y=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$

２． $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$

３． $\int \log(x+\sqrt{x^2+1})\,dx = x\log(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}+C$

４． $a\log(a+\sqrt{a^2+1})-\sqrt{a^2+1}$

５． (1) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (2) 略 (3) $\dfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1}))+C$

(4) $4(\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1))$

６． (1) $a=\dfrac{e^b+e^{-b}}{2}$ (2) (3)

７． $\log a-\dfrac{1}{a}x+\dfrac{1}{6a^3}x^3$

８． (1) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (2)

９． (1) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$ (2) $\dfrac{1}{6}$ (3) $k \leqq \dfrac{1}{3\log 3}$

10. (1) $y=\sqrt{x^2+1}$ (2) $A(t)=\dfrac{t}{2}, S(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{4}-\dfrac{t}{2}$ (3) $t=\log(2+\sqrt{3})$

11. (1) $\dfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1}-\log|x+\sqrt{x^2-1}|)+C$ (2) $\dfrac{1}{2}\log|p+\sqrt{p^2-1}|$ (3) $p=\dfrac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}$,

$q=\dfrac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}$ (4) $\dfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1}-\log(x+\sqrt{x^2-1}))+C$

12. (1) 1 (2) 0 (3) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ (4) $1-e^{-1}$