発展演習

基本的関数の極限計算

1． 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)$$

（山梨医大）

2． $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2+2x+2}-(ax+b)\right\}=0$ のとき、$a\,,b$ の値を求めよ。

（大阪工大）

3． $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x^2+2x+8}+b}{x-2}=\frac{3}{4}$ のとき、$a\,,b$ の値を求めよ。

（青山学院大）

4． x が 0 に限りなく近づくとき、$\displaystyle\frac{\sqrt{1+x}-(1+ax+bx^2)}{x^3}$ が有限な極限値をもつためには定数 $a\,,b$ はいかなる値をとらなければならないか。

（奈良女大）

5． a を定数とするとき、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}$ を求めよ。

（浜松医大）

6． 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-2\sin 2x}{x\cos x}$ （東京電機大）　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^2\theta-b^2\theta}{\tan a\theta-\tan b\theta}$ $(a\neq 0)$ （女子医大）

7． 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$ （東京電機大）　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x^2-1}$ （工学院大）

8． 関数 $\displaystyle f(x)=\frac{(px+q)\sin 2x}{ax+b}$ が $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=2\,,\ \lim_{x\to\infty}=0$ を満たすとき、定数 $a\,,b\,,p\,,q$ についての条件を求めよ。

（岡山大）

９．次の極限値が存在すれば求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty} x\tan\frac{2}{x}$　　(2) $\lim_{x\to 0} x\tan\frac{2}{x}$

（東海大）

10．次の数列の極限値を求めよ。ただし n は整数とする。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^n\theta-\sin^n\theta}{\cos^n\theta+\sin^n\theta}$　ただし、$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$ とする。

（東京）電機大

(2) $\lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{3}{n}\right]}\right)$

（北海道大）

11．次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$　　(2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$　　(4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

12．数列 $\{x_n\}$ が $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x_n}=e\ (n=1,2,3,\cdots)$ をみたすとき、$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$ の値を求めよ。

（東海大）

13．次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{[a]^n}{[a^n]}$　$(a\geqq 1)$

（神戸商大）

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})$　$(a>0)$

（名古屋大）

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\log x}{n}$

14. (1) $a > 0$ に対し、$\sqrt[n]{1+a} = 1+\alpha_n$ とおくとき、$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ を証明せよ。

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{2n}+b^{2n}}$ を求めよ。

（奈良県医大）

15. n を正の整数とする。

(1) $\sqrt[n]{n} < 1+\sqrt{\dfrac{2}{n}}$ が成立することを示せ。

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ の値を求めよ。

（京都産大）

解答

１．$\dfrac{1}{2}$

２．$a=1\ ,\ b=1$

３．$a=1\ ,\ b=\ -4$

４．$a=\dfrac{1}{2}\ ,\ b=-\dfrac{1}{8}$

５．$\dfrac{a^2}{2}$

６．(1) -3　　(2) $a+b$

７．(1) $-\dfrac{1}{2}$　　(2) $-\dfrac{\pi}{2}$

８．$a=q\neq 0\ ,\ b=p=0$

９．(1) 2　　(2) 極限値は存在しない

10. (1) 1　　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

11. (1) e　　(2) e^{a}　　(3) 1　　(4) 1

12. 1

13. (1) 0　　(2) $0<a\leqq 1$ のとき、$\log a$　$a>1$ のとき、$2\log a$　　(3) 0

14. (1) $1+a=(1+\alpha_n)^n\geqq 1+n\alpha_n$ より $0<\alpha_n\leqq\dfrac{a}{n}$

(2) $a^2\geqq b^2$ のとき、a^2　$b^2\geqq a^2$ のとき、b^2

15. (1) $\left(1+\sqrt{\dfrac{2}{n}}\right)^n\geqq 1+n\sqrt{\dfrac{2}{n}}+{}_n\mathrm{C}_2\cdot\dfrac{2}{n}>n$ より成立　　(2) 1