発展演習

微分法の代数的応用

1．$x>0$ で定義された関数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+ax^n$ （n は整数）が極小値をもつために a と n がみたすべき条件を求めよ。また、この条件をみたす a, n の組で n の値が最小となる場合について、 $y=f(x)$ のグラフの概形を書け。

（関西学院大）

2．関数 $f(x)=x+a\cos x$ ($a>1$) は、 $0<x<\pi$ において極小値 0 をとる。この範囲における $f(x)$ の極大値を求めよ。

（室蘭工大）

3． $y=\sin x-ax(\pi-x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ における極値の個数を正の定数 a の値によって分類せよ。

（電通大）

4． $y=|x|e^{2x}$ $(-\infty<x<\infty)$ の極値とそのときの x の値を求めよ。

（工学院大）

5．関数 $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{e^x+1}$ は極値を持たないことを証明せよ。ただし、e は自然対数の底で $e=2.718\cdots$ である。

（弘前大）

6．関数 $f(x)=(x^2+ax+a)e^{-x}$ は、極値をもつものとする。

(1) 極小値が 0 となるように、a の値を求めよ。

(2) 極大値が 3 となるのは、 $a=3$ のときに限ることを示せ。

（旭川医大）

7．a は定数、e は自然対数の底とする。関数 $f(x)=ax+e^{-x}\sin x$ ($0<x<2\pi$) が極値をちょうど 2 個もつとき、a のとり得る値の範囲を求めよ。

（東京商船大）

８．a は正の定数とする。関数 $f(x)=e^{-ax}\sin 2x$ は $0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ において 2 つの極大値をもつことを示せ。また、その極大値を q_1, q_2 ($q_1>q_2$) とおくとき、 $\dfrac{q_2}{q_1}$ を求めよ。

（室蘭工大）

９．区間$0 \leqq x \leqq a$ (a は正の定数) における関数 $y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+3}$ の最大値が $\dfrac{1}{2}$ になり、かつ最小値が $\dfrac{1}{3}$ になるのは、a がどのような範囲の値をとるときか。

（山梨大）

10. $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+2}$ の $a \leqq x \leqq a+1$ における最小値 $F(a)$ を求めよ。

（奈良女大）

11. 関数 $f(x)=(x^2-px+p)e^{-x}$ が極小値をもつとき、その極小値を p の関数とみて $g(p)$ とおく。$g(p)$ の最大値を求めよ。

（山口大）

12. 関数 $y=a(x-\sin 2x)\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値が π であるように a の値を求めよ。

（群馬大）

13. 関数 $y=\log x-a(x-1)$ (a は正の定数) の $1 \leqq x \leqq 2$ における最大値を $f(a)$ とするとき、$b=f(a)$ のグラフを書け。ただし、対数は自然対数で $\log 2=0.7$ とする。

（大分大）

14. 関数 $|e^x-ax|$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値が 2 となるように a の値を求めよ。

（東京工大）

15. a を正の整数とし、$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で関数 $f(x)=-\cos x-\dfrac{a}{4}\cos 2x$ を考える。

(1) $f(x)$ の最大値・最小値を求めよ。

(2) $0<a<1$ のとき、$f(x)$ のグラフの凹凸はどのように変化するか。

（東京大改）

16. x の関数 $\left(1-\dfrac{a}{2}\cos^2 x\right)\sin x$ の最大値が 1 となるような a の範囲を求めよ。

（東京工大）

17. $x>0$ のとき、$\dfrac{x}{ax+1} \leqq \log(1+x)$ が成立するように、正の定数 a の範囲を求めよ。

（群馬大）

18. $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において、次の不等式を証明せよ。

(1) $\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x$　　　(2) $\cos x \leqq 1-\dfrac{1}{\pi}x^2$

（武蔵工大）

19. $0 < x \leqq 1$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$1+\frac{8}{10}x < (1+x)^{\frac{9}{10}} < 1+\frac{9}{10}x$$

（名古屋工大）

20. $x > 0$ のとき、$x+1 > e^{x-\frac{1}{2}x^2}$ が成り立つことを証明せよ。

21. $0 < x < \pi$ で常に $p\sin x \leqq \dfrac{1}{1-\cos x}$ を満たす p の最大値を求めよ。

（東京電機大）

22. x がどのような正の数であっても $e^x \geqq ax^n$ となるような a の最大値を求めよ。ただし、n は一定の自然数とする。

（慶応大）

23. $a > 0$ とする。このとき、$x > 0$ の範囲で不等式 $(x^2-2ax+1)e^{-x} < 1$ が成り立つことを証明せよ。ただし、e は自然対数の底とする。

（奈良女大）

24. a を正の定数とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = x-\dfrac{x^2}{2}+ax^3-\log(1+x)$ が最小値をとるときの x の値を求めよ。

(2) $x > -1$ でつねに $x-\dfrac{x^2}{2}+ax^3 \geqq \log(1+x)$ が成り立つような a の値を求めよ。

（早稲田大）

25. m , n は正の整数で、$m < n$ とする。$0 < x < 1$ のとき、$\left(1+\dfrac{x}{m^2}\right)^m, \left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)^n$ の大小を定めよ。

（東京工大）

26. $a > 0$, $b > 0$, $p > q > 0$ のとき、$(a^q+b^q)^{\frac{1}{q}} > (a^p+b^p)^{\frac{1}{p}}$ を示せ。

（東京電機大）

27. $a<b$のとき、$e^{a}(b-a)<e^{b}-e^{a}<e^{b}(b-a)$が成り立つことを証明せよ。ただし、$e$は自然対数の底である。

（名城大）

28. aが1でない定数のとき、方程式 $x^{2}+ax=\sin x$はちょうど2つの実数解をもつことを証明せよ。

（名古屋大）

29. 3次方程式 $x^{3}-3mx+m-3=0$（mは実数）が異なる実数解α, β, γをもつとき、

(1) mはどんな範囲の値か。

(2) $\alpha<\beta<\gamma$とするとき、α, β, γはそれぞれどんな範囲にあるか。

30. (1) $t>0, a\geqq 1$のとき、不等式$te^{\frac{a}{t}}>2$が成り立つことを示せ。

(2) $0<k<1$のとき、$k^{2}e^{\frac{x}{k}}-\cos 2x=0$を満たす正数$x$がただ1つあることを示せ。

（大阪市大）

31. xの方程式 $x-\dfrac{1}{n}x^{n}=\sin x$は、$0<x<\dfrac{\pi}{2}$の範囲において、実数の解をいくつもつか。ただし、$n$は3より大きい整数とする。

（名古屋大）

32. (1) $y=\dfrac{\log x}{x}$のグラフの概形を書け。

(2) 上を利用して、$a^{b}=b^{a}, a<b$の正整数解を決定せよ。

（岐阜大）

解答（グラフ、証明は略）

１．$an>0$ かつ　$n \geqq -1$　グラフ　略

２．π　　３．$\dfrac{1}{\pi}<a<\dfrac{1}{2}$ のとき 3 個　その他のとき 1 個

４．極大値 $\dfrac{1}{2e}$ $\left(x=-\dfrac{1}{2}\right)$　極小値 $0\ (x=0)$　５．略

６．(1) 0 , 4　(2) 略　７．$-e^{-2\pi} \leqq a<e^{-\frac{\pi}{2}}$　８．$\dfrac{q_2}{q_1}=\dfrac{1}{e^{a\pi}}$

９．$1 \leqq a \leqq 9$

10. $a<-\sqrt{2}-1, a>1$ のとき $f(a+1)$　$-\sqrt{2}-1 \leqq a \leqq -\sqrt{2}$ のとき $-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

$-\sqrt{2}<a \leqq 1$ のとき $f(a)$

11. $\dfrac{1}{e}$　12. $2 , -2$

13. $0<a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき $f(a)=-a+\log 2$　$\dfrac{1}{2}<a<1$ のとき $f(a)=-\log a+a-1$

a≧1 のとき $f(a)=0$

14. $e-2 , e+2$

15. $0<a \leqq 1$ のとき $\mathrm{M}=1-\dfrac{a}{4}$　$m=-1-\dfrac{a}{4}$　$a>1$ のとき $\mathrm{M}=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a}{4}$　$m=-1-\dfrac{a}{4}$

16. $-1 \leqq a \leqq 8$　17. $a \geqq \dfrac{1}{2}$　18. 略　19. 略　20. 略

21. $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$　22. $\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$　23. 略　24. (1) $\dfrac{1}{3a}-1$　(2) $\dfrac{1}{3}$

25. $\left(1+\dfrac{x}{m^2}\right)^m>\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)^n$　26. 略　27. 略　28. 略

29. (1) $m>1$　(2) $\alpha<-1, -1<\beta<\dfrac{1}{3}, \gamma>2$　30. (1) 略　(2) 略

31. 1 個　32. (1) 略　(2) $a=2 , b=4$