

積分の計算方法

1. 次の計算をせよ。

(1) $\int_0^1 x^2(1-x)^n dx$

(2) $\int_1^2 x\sqrt{x-1} dx$

(3) $\int \frac{x^3-3}{x^2+3x+2} dx$

(4) $\int \sin 2x \cos 3x dx$

2. 次の関数の原始関数の1つをそれぞれ求めよ。

(1) $3x^3\sqrt{1-3x}$

(2) $x^2\sqrt{2x+1}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{2-3x}}$

(4) $\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$

(5) $\frac{x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$

(6) $\frac{x^2+1}{x^2+3x}$

(7) $\frac{x+1}{x(x+2)(x+3)}$

(8) $\frac{3}{(x-1)(x+2)^2}$

3. 次の関数の原始関数の1つをそれぞれ求めよ。

(1) $\sin 3x \sin x$

(2) $\sin^3 x$

(3) $\cos^2 x \sin 3x$

4. 定積分 $f(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n \sin x + \cos x)^2 dx$ を最小にする整数 n の値を求めよ。

(大阪女大)

5. $\int \frac{x^3+2x}{x^2+1} dx$ を求めよ。

6. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \tan x dx$

(2) $\int \frac{\log x}{x} dx$

7. 次の関数の原始関数の1つをそれぞれ求めよ。

(1) $\sin x \cos x$

(2) $x\sqrt{x^2+1}$

(3) $\frac{1}{x \log x}$

(4) $\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}$

(5) $(x_2-x)e^{-x}$

(6) $e^{2x} \sin x$

8. 次の関数の原始関数の1つをそれぞれ求めよ。

- (1) $x \log x$ (2) $\log x$
 (3) $(\log x)^2$ (4) $e^x \sin^2 x$

9. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx$ ($n=1, 2, 3, \dots$) のとき、 I_{n+2} を I_n で表せ。

(北海道大)

10. 次の定積分を計算せよ。

- (1) $\int_0^1 \sqrt{1-\sqrt{x}} dx$ (2) $\int_1^4 \frac{x}{2\sqrt{x}-1} dx$
 (3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$ (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^3 x dx$
 (5) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ (6) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx$

11. 次の関数の原始関数の1つをそれぞれ求めよ。置換する場合は、置換した文字で答えてよい。

- (1) $(\log x)^3$ (2) $\sin x \cos^2 x$ (3) $x2^x$
 (4) $\log(x+\sqrt{x^2+1})$ (5) $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ (6) $\frac{1}{(x^2+4)^2}$
 (7) $\tan^2 x$ (8) $\sin 2x\sqrt{\cos^2 x+1}$ (9) $\sin^5 x$
 (10) $\sin(\log x)$ (11) $\frac{1}{1+\sin x}$ (12) $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$
 (13) $\frac{\cos^3 x}{1-\sin x}$ (14) $2x^3 e^{x^2}$ (15) $\frac{e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
 (16) $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ (17) $x(\log x)^2$ (18) $\tan x \log(\cos^2 x)$
 (19) $\frac{1}{2x^2+3}$ (20) $\frac{1}{-x^2+4}$ (21) $\frac{1}{(x-1)\sqrt{x+1}}$
 (22) $\frac{1}{x^2+x+1}$ (23) $\frac{1}{\sin x}$ (24) $\frac{1}{\sin^2 x}$

$$1. (1) \frac{1}{n+3} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+1} \quad (2) \frac{16}{15}$$

$$(3) \frac{x^2}{2} - 3x + 11 \log|x+2| - 4 \log|x+1| + C$$

$$(4) -\frac{\cos 5x}{10} + \frac{\cos x}{2} + C$$

$$2. (1) -\frac{(1-3x)^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{(1-3x)^{\frac{7}{3}}}{7}$$

$$(2) \frac{(2x+1)^{\frac{7}{2}}}{28} - \frac{(2x+1)^{\frac{5}{2}}}{10} + \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

$$(3) -\frac{2}{3}(-3x+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(4) \frac{2(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{4(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + 2(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$(5) \frac{2(x+3)^{\frac{5}{2}}}{15} - \frac{2(x+3)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{15}$$

$$(6) x + \frac{1}{3} \log|x| - \frac{10}{3} \log|x+3|$$

$$(7) \frac{1}{6} \log|x| + \frac{1}{2} \log|x+2| - \frac{2}{3} \log|x+3|$$

$$(8) \frac{1}{3} \log|x-1| - \frac{1}{3} \log|x+2| + (x+2)^{-1}$$

$$3. (1) \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x$$

$$(2) -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos 3x$$

$$(3) -\frac{1}{20} \cos 5x - \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{6} \cos 3x$$

$$5. \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C$$

$$7. (1) \frac{1}{2} \sin^2 x \quad (2) \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$4. n = -1$$

$$6. (1) -\log|\cos x| + C$$

$$(2) \frac{1}{2} (\log x)^2 + C$$

$$8. (1) \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{x^2}{4}$$

$$(3) \log |\log x| \quad (4) \frac{1}{2} \log(e^{2x} + 1)$$

$$(5) -(x^2 + x + 1)e^{-x} + C$$

$$(6) \frac{1}{5}(e^{2\pi} + 1)$$

$$(2) x \log x - x$$

$$(3) x(\log x)^2 - 2(x \log x - x)$$

$$(4) \frac{1}{5}e^x(\sin^2 x - \sin 2x + 2)$$

$$9. I_{n+2} = (n+2) \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n+1} - (n+1)I_n \right\}$$

$$10. (1) \frac{8}{15} \quad (2) \frac{10}{3} + \frac{1}{8} \log 3$$

$$(3) \frac{2}{3} \quad (4) \frac{2}{15} \quad (5) \frac{\pi}{4} \quad (6) \frac{\pi}{4} |a| a$$

$$11. (1) x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6(x \log x - x) \quad (2) -\frac{1}{3} \cos^3 x \quad (3) \frac{x2^x}{\log 2} - \frac{2^x}{(\log 2)^2}$$

$$(4) x \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} \quad (5) \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} \quad (6) \frac{1}{16} \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right)$$

$$(7) \tan x - x \quad (8) -\frac{2}{3} \left(\frac{\cos 2x + 3}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (9) -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{t^5}{5}$$

$$(10) \frac{1}{2} x \{ \sin(\log x) - \cos(\log x) \} \quad (11) \tan x - \frac{1}{\cos x} \quad (12) (x^2 + 9)^{\frac{1}{2}}$$

$$(13) \frac{1}{2}(1 + \sin x)^2 \quad (14) (x^2 - 1)e^{x^2} \quad (15) -\frac{1}{2} \log(1 + e^{-2x})$$

$$(16) \log(e^x + e^{-x}) \quad (17) \frac{x^2}{2} \left\{ (\log x)^2 - \log x + \frac{1}{2} \right\} \quad (18) -(\log |\cos x|)^2$$

$$(19) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} \theta \quad (20) \frac{1}{4} \log \left| \frac{x+2}{x-2} \right| \quad (21) \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| \quad (22) \frac{2\sqrt{3}}{3} \theta$$

$$(23) \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \quad (24) -\frac{1}{\tan x}$$