発展演習

積分法の図形量への応用

1．2 曲線 $y=\sin x$ と $y=\cos 2x$ によって囲まれる部分の面積を求めよ。ただし、$0<x<2\pi$ とする。

（芝浦工大）

2．2 つの曲線

$$\begin{cases} C_1 : y=2\sin^2 x \\ C_2 : y=\sin x-\cos x+1 \end{cases}$$

（ $0\leqq x\leqq 2\pi$ ）の交点の x 座標の最小値をαとし最大値をβとするとき、$\alpha\leqq x\leqq\beta$において、C_1 , C_2 が囲む面積を求めよ。

（横浜国大）

3．曲線 $y=2x\cos^2 x$ と直線 $y=x$ とで囲まれる部分の面積を求めよ。ただし、$0\leqq x\leqq\pi$とする。

（工学院大）

4．次の 2 曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

$y=3^x$, $y=-ax^2+(2+a)x+1$ 　$(a>0)$

（立命館大）

5．曲線 $y=e^{-x}\sin x\, y=e^{-x}\sin x$（ $0\leqq x\leqq 2\pi$ ）と x 軸とで囲まれた二つの部分の面積を左から A , B として、A : B を求めよ。

（京都府大）

6．$0\leqq x\leqq\pi$, $k>\dfrac{1}{2}$ のとき、曲線 $y=\sin x$ と曲線 $y=k\sin 2x$ とで囲まれる 2 つの部分の面積の比が 1 : 2 となるよう定数 k の値を定めよ。

（静岡薬大）

7．曲線 $y=\cos x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および y 軸で囲まれる部分の面積が、2 曲線 $y=a\sin x$, $y=b\sin x$（ $a>b$ ）によって 3 等分されるように a , b の値を定めよ。

（富山大）

8．曲線 $y=\sqrt{3-\sqrt{x}}$ と x 軸、および 2 直線 $x=1$, $x=4$ とで囲まれる部分の面積を求めよ。

９．曲線 $C:\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$ 上の x 座標が a である点における接線と C および x 軸 ,y 軸とで囲まれる部分の面積を $S(a)$とする。$S(a)$ ($0<a<16$) の最小値を求めよ。

（和歌山県医大）

10. $y=\dfrac{1}{2x}$ ($x>0$) の表す曲線 C 上の 1 点を P とし、原点 O と点 P を結ぶ線分と直線 $y=x$ および C で囲まれる図形の面積 s とするとき、点 P から直線 $y=x$ までの距離 d を s で表せ。

（金沢大）

11. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ （ $x\geqq 0$ ）の逆関数を $g(x)$とするとき、曲線 $y=g(x)$と x 軸および $x=a$ ($a>0$) で囲まれる部分の面積を求めよ。

（慶応大）

12. 曲線 $y=x+\sin x$（ $0\leqq x\leqq 2\pi$ ）と直線 $y=x$ とで囲まれた部分を x 軸のまわりに回転したとき得られる立体の体積を求めよ。

（東北学院大）

13. 2 曲線 $y=\sin x$, $y=\cos x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$と直線 $y=1$ とで囲まれた部分を直線 $y=1$ のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ。

（新潟大）

14. だ円 $25x^2+36y^2-36y+5=0$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

（信州大）

15. 2 つの曲線 $y=\cos x$ と $y=\sin(x-p)$との区間$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\left(\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right)$における交点の x 座標をそれぞれ a , b とする。ただし、p は定数で $0<p<\dfrac{\pi}{2}$ である。区間［ a , b ］において 2 つの曲線で囲まれた部分を、x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めよ。

（富山大）

16. 2 曲線 $y=\sin x$, $y=\cos x\left(-\dfrac{3}{4}\pi\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$で囲まれた図形を x 軸のまわりに半回転（ 180° 回転 ）してできる立体の体積を求めよ。

（神戸大）

17. 曲線 $y=\log x$（ $1 \leqq x \leqq e$ ）と x 軸、y 軸および直線 $y=1$ とで囲まれる図形を考える。

(1) この図形を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

(2) この図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

（新潟大）

18. 曲線 $y^2=x^2(1-x^2)$を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

（小樽商大）

19. 放物線 $y=x^2$ の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分の長さを求めよ。

20. 次の曲線の長さをそれぞれ求めよ。

(1) $y=x^{\frac{3}{2}}\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{4}{3}\right)$

(2) $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{4x}$ （$1 \leqq x \leqq 2$）

(3) $y=\log(1-x^2)\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$

21. 次の曲線の長さをそれぞれ求めよ。

(1) $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=2\sin^2 t \end{cases} \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ （宮崎大）

(2) $\begin{cases} x=t^3\cos\dfrac{3}{t} \\ y=t^3\sin\dfrac{3}{t} \end{cases}$ （$2 \leqq t \leqq 3$） （学習院大）

(3) $\begin{cases} x=a\cos\theta(1+\cos\theta) \\ y=a\sin\theta(1+\cos\theta) \end{cases}$ （$0 \leqq \theta \leqq \pi$） （小樽商大）

22. 曲線 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ の $a \leqq x \leqq a+1$ の部分の長さを $l(a)$とするとき、$l(a)$の最小値を求めよ。

（徳島大）

23. 動点 P は点 A(a , 0)（ $a>0$ ）を出発して原点を中心とする半径 a の円周上を角速度 1 で点 B(0 , a)まで動く。Q は、P において P の進む方向と反対の向きに引いた接線上において、常に PQ=弧 AP が成り立つように動く。出発後 t 秒間に Q のえがく曲線の長さ s を求めよ。

（法政大）

24. xy 平面上で、点 A(1 , 0)を出発し、各時刻 t で

$$\mathrm{OP}=1-at^2,\ \angle\mathrm{AOP}=\sqrt{a}t \quad (a>0)$$

を満たしながら原点 O まで運動する点 P がある。動点 P が A から原点 O にいたる道のりを求めよ。

（名古屋工大）

25. z 軸を軸とする半径 1 の円柱の側面で、xy 平面より上（z 軸の正の方向）にあり、平面 $x-\sqrt{3}y+z=1$ より下（z 軸の負の方向）にある部分 D の面積を求めよ。

（東京大）

26. 次のような 2 つの円盤 C_0 , C_1 を考える。

$C_0=\{(x,y,0)\mid x^2+y^2\leqq 1\}$

$C_1=\{(x,y,1)\mid x^2+y^2\leqq 1\}$

C_0 の周上の点 P($\cos\theta$, $\sin\theta$, 0)と C_1 の周上の点 P(0 , 1 , 1)を通る直線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面と、C_0 , C_1 によって囲まれえた立体の体積 $V(\theta)$を求めよ。

（慶応大改）

27. 点 P は円 $x^2+y^2=1$ 上を、点 A(1 , 0)から動きはじめて t 秒後に$\angle\mathrm{AOP}=2\pi$となる運動をする。ただし、O は原点である。また、t 秒後の点 P を通り xy 平面に垂直な直線上に $\mathrm{PQ}=t\sin\pi t$ となるような点 Q を xy 平面の上側にとる。このとき、$0\leqq t\leqq 1$ において線分 PQ のえがく図形の面積を求めよ。

（神戸大）

28. 点(0 , 0 , 1)を頂点とし、xy 平面上の円板 $C: x^2+y^2\leqq 1$, $z=0$ を底面とする円錐 A がある。A を直線 $x=t$, $z=0$ をふくみ、点（ 0 , 0 , t ）を通る平面 $\pi(t)$ で切った時の切り口の面積を $S(t)$ とする。ただし、$0<t<1$である。

（次ページに続く）

(1) 平面 $z=u$ が切り口と交わるとき、その交線の長さを $l(u)$とすると、$l(u)=$ [　　　] である。
(2) $S(t)$を t の関数として表せ。
(3) $S(t)$を最大にする t の値を求めよ。

（慶応大）

29. 座標空間において xy 平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$, $b>0$）を底面とし、母線が z 軸に平行な円柱を S , x 軸を含み、点 P(0 , b , c)を通る平面を π とする。
(1) 平面 π の方程式は[　　　　]となる。
(2) $c>0$ のとき、楕円柱 S, 平面 π, および xy 平面の $y\geqq 0$ の部分で囲まれた立体の体積を求めよ。

（慶応大）

30. a は正の定数とし、曲面 D は$(x-a)^2+y^2+z^2=a^2$, $0\leqq x\leqq a$, $0\leqq y\leqq a$, $0\leqq z\leqq a$ によって表されるとする。D を z 軸のまわりに回転してえられる回転体の体積を求めよ。

（東京理科大）

31. 円柱 $x^2+y^2\leqq a^2$, $0\leqq z\leqq h$（$a>0$, $h>0$）の表面上の 2 点を A(a , 0 , 0) , B(a , 0 , h)とする。点 A を出発した動点 P が円柱の側面を、内部を左手に見ながら進み、ひとまわりして点 B に達するとき、
(1) P の動く距離が最短となるときの P の軌跡 C を yz 平面上に正射影して得られる曲線 C ’の方程式を求めよ。
(2) (1)の C ‘と z 軸とで囲まれる yz 平面内の図形を z 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

（千葉大）

※(3) P が C 上を動くとき、線分 OP（O は座標の原点）がつくる曲面と 3 角形 OAB とで円柱を 2 分するとき、体積はどのような比に分割されるか。

32. 曲線 $\begin{cases} x=\theta-\sin\theta \\ y=1-\cos\theta \end{cases}$（$0\leqq\theta\leqq 2\pi$）と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

33. (1) 曲線 $C:\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=(1-t)^2 \end{cases}$ （$0 \leqq t \leqq 1$）の概形を書け。

(2) 曲線 C と x 軸および y 軸とでかこまれる部分 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

（関西大）

解答

１．$\frac{9}{4}\sqrt{3}$

２．$\frac{9}{2}-\sqrt{2}$

３．$\frac{5}{8}\pi-\frac{1}{4}$

４．$\frac{a}{6}+2-\frac{2}{\log 3}$

５．A：B = 1：$e^{-\pi}$

６．$k=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

７．$a=\frac{4}{3}, b=\frac{5}{12}$

８．$\frac{24}{5}\sqrt{2}-\frac{16}{5}$

９．$\frac{32}{2}$

10. $\frac{1}{2}\left(e^{2x}-\frac{1}{e^{2x}}\right)$

11. $S=a\log(a+\sqrt{a^2+1})-\sqrt{a^2+1}+1$

12. $8\pi^2$

13. $2\pi\left(\frac{3}{8}\pi-\sqrt{2}+\frac{1}{4}\right)$

14. $\frac{2}{15}\pi^2$

15. $\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}+p+3\cos p\right)$

16. $\frac{1}{4}\pi^2+\frac{\pi}{2}$

17. (1) $\frac{e^2-1}{2}\pi$　(2) 2π

18. $\frac{1}{4}\pi^2$

19. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{4}\log(2+\sqrt{5})$

20. (1) $\dfrac{56}{27}$　(2) $\dfrac{59}{24}$　(3) $\log 3-\dfrac{1}{2}$

21. (1) $\dfrac{61}{27}$　(2) $10^{\frac{3}{2}}-5^{\frac{3}{2}}$　(3) $4|a|$

22. $\dfrac{e-1}{\sqrt{e}}$

23. $\dfrac{a}{2}t^2$

24. $\dfrac{4}{3}$

25. $\dfrac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}$

26. $\dfrac{\sin\theta+2}{3}\pi$

27. 2

28. (1) $2\sqrt{(1-t)(1+t-2u)}$　(2) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(1-t)(1+t)^3}$　(3) $\dfrac{1}{2}$

29. (1) $bz=cy$　(2) $\dfrac{2}{3}abc$

30. $\dfrac{1}{2}\pi^2a^3$

31. (1) $y=a\sin\dfrac{2\pi z}{h}$　(2) $\dfrac{\pi}{2}a^2h$　(3) $1:2$

32. 3π

33. (1) 略　(2) $\dfrac{1}{16}(7+\cos 4)\pi$